Universität Freiburg
PD Dr. A. Jakoby
Sommer 2007

Übungen zum Repetitorium
Informatik III

Übungsaufgaben zu Berechenbarkeit

1. Für eine DTM M sei f_M die von M berechnete Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche sind falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.
   (a) Zu jeder Einband-DTM M gibt es eine Einband-DTM M', sodass
   $$f_M = f_{M'} \text{ und } M' \text{ hält für alle Eingaben akzeptierend an.}$$
   (b) Zu jeder Einband-DTM M gibt es eine Einband-DTM M', sodass
   $$f_M = f_{M'} \text{ und } M' \text{ hat für alle Eingaben akzeptierend oder eine endlose Berechnung.}$$
   (c) Für jede DTM gilt: Entweder hält die DTM auf alle Eingaben, oder sie hat für unendlich viele Eingaben eine endlose Berechnung.
   (d) Für jede DTM gilt: Entweder hält die DTM auf alle Eingaben, oder sie hält nur für endlich viele Eingaben.

2. Betrachten Sie zwei Sprachen L, L'. Welche der folgenden Antworten sind richtig und welche sind falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.
   (a) Sei $L \subseteq L'$ und L entscheidbar, dann ist auch L' entscheidbar.
   (b) Für jede Sprache L' gibt es eine entscheidbare Sprache $L \subseteq L'$.
   (c) Für jede Sprache L' gibt es eine Sprache $L \subseteq L'$, welche nicht entscheidbar ist.
   (d) Sind L und L' entscheidbar, dann ist auch $L \cup L'$ entscheidbar.

3. Zeigen Sie für die Sprachen A, B, C:
   (a) Gilt $A \leq_m B$ und $B \leq_m C$ gilt, dann gilt auch $A \leq_m C$ (Transitivität).
   (b) Es gilt $A \leq_m A$ (Reflexivität).
   (c) Gilt $A \leq_T B$ und $B \leq_T C$ gilt, dann gilt auch $A \leq_T C$ (Transitivität).
   (d) Es gilt $A \leq_T A$ (Reflexivität).

4. Seien A, B zwei disjunkte Sprachen, d.h. $A \cap B = \emptyset$. Welche der folgenden Antworten sind richtig und welche sind falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.
   (a) Ist A entscheidbar und B rekursiv aufzählbar, dann ist $A \cup B$ rekursiv aufzählbar.
   (b) Für alle rekursiv aufzählbaren Sprachen A und B mit $A \cap B = \emptyset$ ist $A \cup B$ entscheidbar.

5. Sei M eine DTM. Zeigen Sie, dass die Sprache
   $$\{ \langle M \rangle \mid M \text{ hält auf keiner Eingabe} \}$$
   nicht rekursiv aufzählbar ist.

6. Welche der folgenden Mengen ist rekursiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
   (a) $A = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert Eingabe } \langle M \rangle \}$
   (b) $B = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ entscheidet das Halteproblem} \}$
   (c) $C = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ kann durch einen äquivalenten Kellerautomaten ersetzt werden} \}$
   (d) $D = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } \langle M \rangle \text{ in } |\langle M \rangle| \text{ Schritten} \}$
   (e) $E = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ hält auf alle Eingaben} \}$

7. Sei M eine DTM. Zeigen Sie, dass die Sprache

$$\{ \langle M \rangle \mid \text{es gibt eine Eingabe, auf die } M \text{ anhält} \}$$

nicht rekursiv ist.

8. Zeigen Sie oder widerlegen Sie:

   (a) $A \leq_m B \quad \Longleftrightarrow \quad A \leq_T B$

   (b) $A \leq_m C$ und $B \leq_m C \quad \Longrightarrow \quad A \cap \overline{B} \leq_m C$

   (c) $A \leq_T C$ und $B \leq_T C \quad \Longrightarrow \quad A \cap \overline{B} \leq_T C$

9. Seien A und B rekursiv aufzählbare Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:

   (a) $A \cap B$ ist rekursiv aufzählbar.

   (b) $A \setminus B$ ist rekursiv aufzählbar.

   (c) $\overline{A}$ ist rekursiv aufzählbar.

   (d) Jede Teilmenge C von A ist rekursiv aufzählbar.

   (e) Jede endliche Teilmenge C von A ist rekursiv aufzählbar.

   (f) Für jede endliche Menge D ist $A \setminus D$ rekursiv aufzählbar.

10. Beweisen oder widerlegen Sie:

   (a) Es gibt eine unendliche Folge $x_1, x_2, \ldots$ von unterschiedlichen binären Zeichenketten für deren Kolmogorov-Komplexität gilt:

   $$K(x_i) \quad < \quad c$$

   für eine Konstante c.

   (b) Für höchstens ein Viertel aller Worte $x \in \{0,1\}^n$ gilt

   $$K(x) \quad \leq \quad n - 4\ .$$

11. Welche der folgenden Mengen ist rekursiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (a) Sei $c \in \mathbb{N}$, dann sei $A_c \;=\; \{ \langle M \rangle \mid$ es existiert eine DTM M' mit $|\langle M' \rangle| \leq c$, sodass M und M' die gleiche Funktion berechnen $\}$

   (b) $B \;=\; \{ \langle M \rangle \mid M$ berechnet eine konstante Funktion $\}$

   (c) Sei $c \in \mathbb{N}$, dann sei $C \;=\; \{ \langle M \rangle \mid M$ hält auf keine Eingabe und $|\langle M \rangle| \leq c \}$

12. Sei $L \subseteq \Sigma^*$ mit $L \neq \emptyset$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

   (a) L ist rekursiv aufzählbar

   (b) Es gibt eine partiell rekursive Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, d.h. f wird durch eine DTM berechnet, muss jedoch nicht auf allen Eingaben definiert sein, sodass für alle $x \in \Sigma^*$

   $$f(x) \text{ ist definiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in L\ .$$

   (c) Es gibt eine totale berechenbare Funktion $g : \mathbb{N} \to \Sigma^*$, d.h. g wird durch eine DTM berechnet und ist auf allen Eingaben definiert, sodass

   $$g(\mathbb{N}) \quad = \quad L\ .$$