ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Algorithmen für drahtlose Netzwerke

Ideale Zellstrukturen: Voronoi-Diagramme

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

CoNe Freiburg

IIF INSTITUT FÜR INFORMATIK FREIBURG

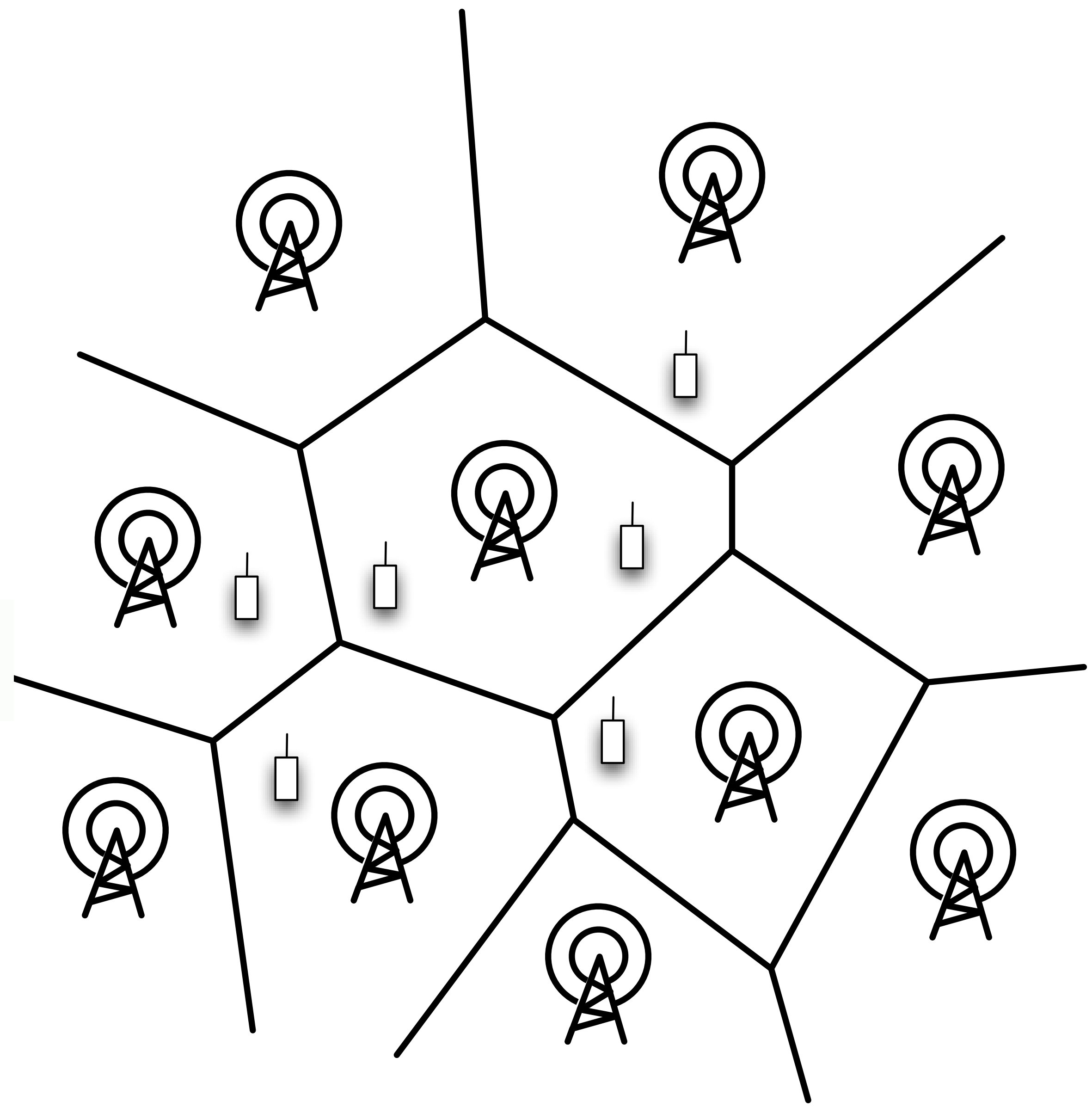
Voronoi-Diagramme Definition (I)

- **Best-Station-Problem nur unter Berücksichtung von Path Loss führt zu Voronoi-Diagrammen**
- **Abstandsmaß:**
  - Euklidischer Abstand
  - = L_2-Norm
  - $p=(p_1,p_2)$, $q=(q_1,q_2) \in \mathbf{R}^2$

$$|p,q| := ||p,q||_2 := \sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}\ .$$

- **Bisektor B(p,q)**

$$B(p,q) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |p,x| = |q,x|\}\ .$$



Voronoi-Diagramme Definition (II)

- **Bisektor**

$$B(p,q) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |p,x| = |q,x|\} \ .$$

- **Zerlegt Ebene in Halbebenen D(p,q) und D(q,p)**

$$D(p,q) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |p,x| < |q,x|\}$$

$$D(q,p) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |p,x| > |q,x|\}$$

- **Für gegebene Punktmenge V definiere Voronoi-Region VR(p,V) eines Punkts v∈V:**

$$\mathbf{VR}(p,V) = \bigcap_{q \in V \setminus \{p\}} D(p,q)$$

Voronoi-Diagramme Definition (III)

- **Voronoi-Region VR(p,V)**

$$\mathbf{VR}(p,V) = \bigcap_{q \in S \setminus \{p\}} D(p,q)$$

- **Voronoi-Diagramm VD(V)**

$$\mathbf{VD}(V) := \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{p \in V} \mathbf{VR}(p,V)$$

- **Alle Voronoi-Regionen sind konvex**
  - Beweis: Übung
- **Voronoi-Diagramme bestehen aus Strecken, Halbgeraden und Punkten**

Zellulare Netze
Voronoi-Diagramme

- **Bisektor** $B(p,q) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |p,x| = |q,x|\}$.
- **Halbebene** $D(p,q) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |p,x| < |q,x|\}$
- **Voronoi-Region VR(p,V), p $\in$ V $\subseteq$ IR^2:**

$$\boldsymbol{VR}(p,V) = \bigcap_{q \in V \setminus \{p\}} D(p,q)$$

- **Voronoi-Diagramm VD(V), V $\subseteq$ IR^2:**

$$\boldsymbol{VD}(V) := \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{p \in V} \boldsymbol{VR}(p,V)$$

Voronoi-Diagramme
Struktur

- **Voronoi-Diagramme bestehen aus Strecken, Halbgeraden und Punkten**
  - Betrachte benachbarte Voronoi-Regionen VR(p,V) und VR(q,V)
  - Dann muß jeder Punkt des gemeinsamen Rands im Bisektor B(p,q) liegen, weil

$$\overline{\mathbf{VR}(p,V)} \cap \overline{\mathbf{VR}(q,V)} \subseteq \overline{D(p,q)} \cap \overline{D(q,p)} = B(p,q)$$

- **Jede Voronoi-Region ist konvex +**
- **Randstücke bestehen aus endlich vielen Geradenstücken**

$\Rightarrow$ **Voronoi-Diagramm ist ein geometrischer Graph**

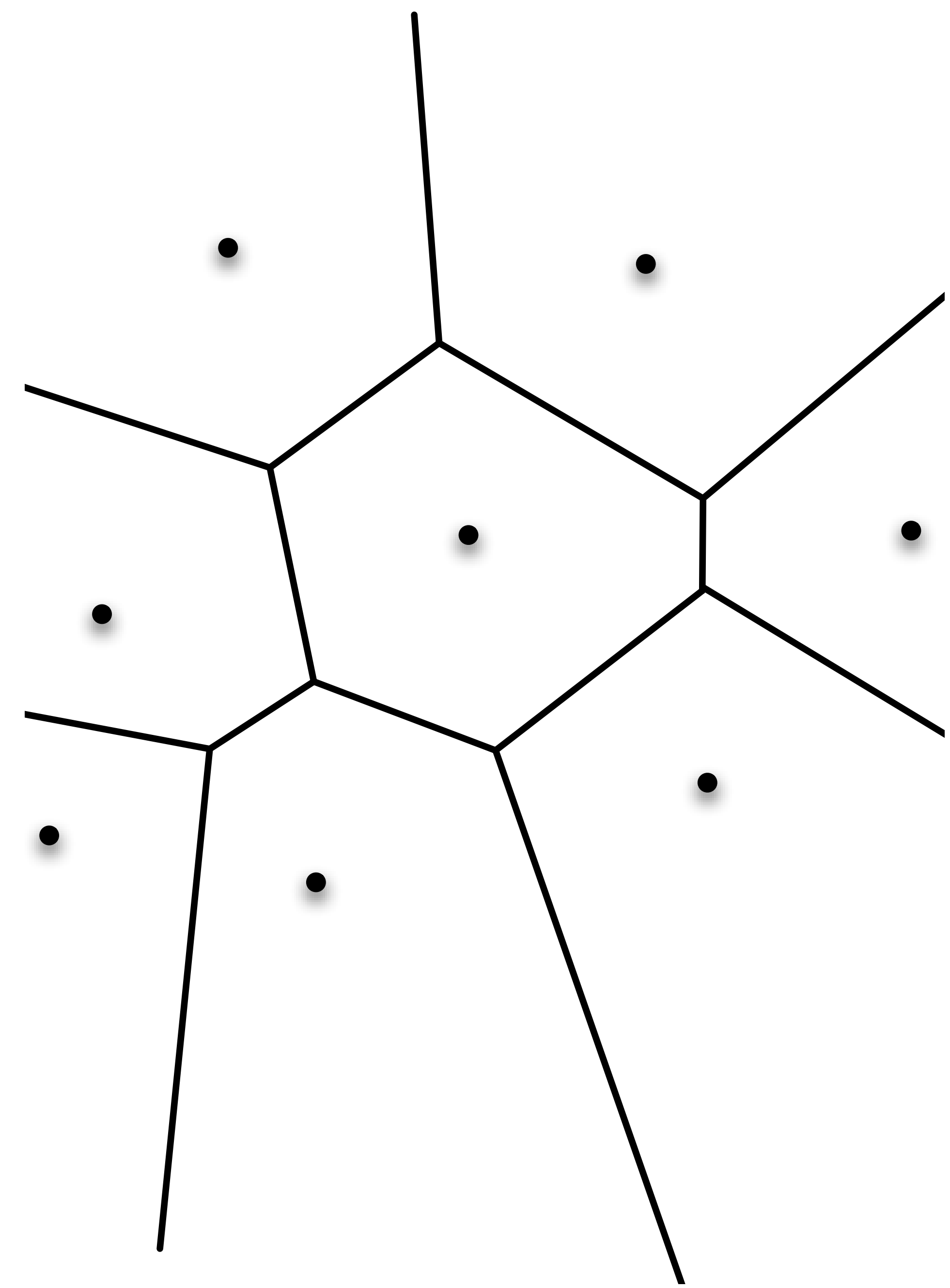
Geometrischer Graph

- **Geometrische Realisierung eines ungerichteten Graphen in R^2**
- **Knoten werden auf Punkte abgebildet**
- **Kanten werden auf einfache Wege abgebildet**
- **Keine Überschneidung zwischen verschiedenen einfachen Wegen**
  - Planarer Graph
- **Zusammenhangskomponente**
  - Maximaler Teilgraph indem jeder Knoten einen Weg zu jedem anderen Knoten besitzt

Kreis-Lemma

Lemma 2 *Sei x ein Punkt der Ebene und sei $C(x)$ der sich von x ausbreitende Kreis. Dann gilt für das Voronoi-Diagramm einer Punktmenge V:*

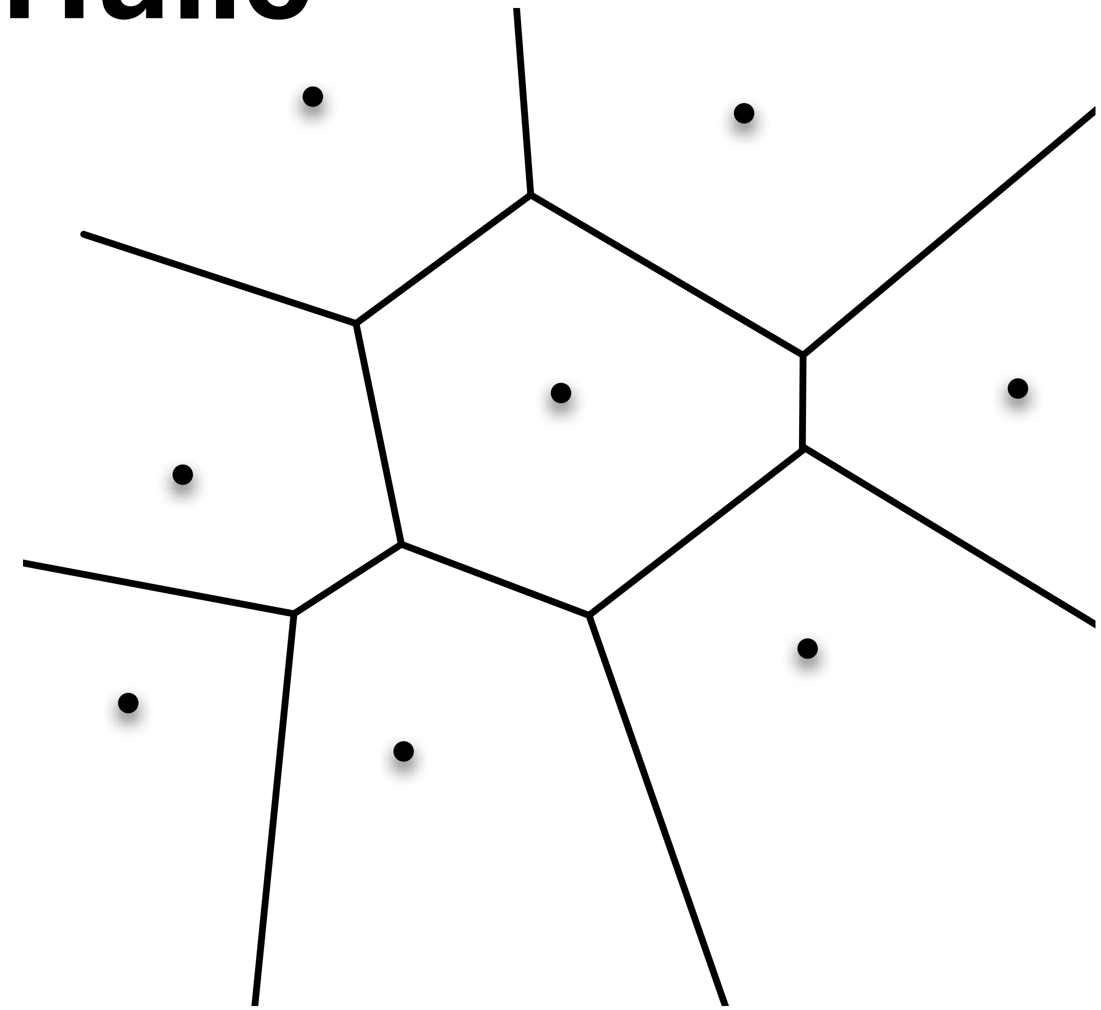
1. *$C(x)$ trifft zuerst nur auf einen Punkt $p \in V$ genau dann, wenn x in der Voronoi-Region von p liegt.*
2. *$C(x)$ trifft zuerst nur auf zwei Punkte $p, q \in V$ genau dann, wenn x auf einer Voronoi-Kante zwischen den Regionen von p und q liegt.*
3. *$C(x)$ trifft zuerst genau auf die Punkte $p_1, \ldots, p_k$ mit $k \geq 3$ genau dann, wenn x ist ein Voronoi-Knoten an den die Regionen von $p_1, \ldots, p_k$ angrenzen.*



Konvexe Hülle

- **Voronoi-Diagramme stehen in enger Beziehung zur konvexen Hülle CH(V) einer Punktmenge V**

$$CH(V) := \bigcap_{K \supseteq V : K \text{ konvex}} K$$



Lemma 3 *Ein Punkt $p \in V$ hat genau dann eine unbeschränkte Voronoi-Region, wenn er auf dem Rand der konvexen Hülle von V liegt.*

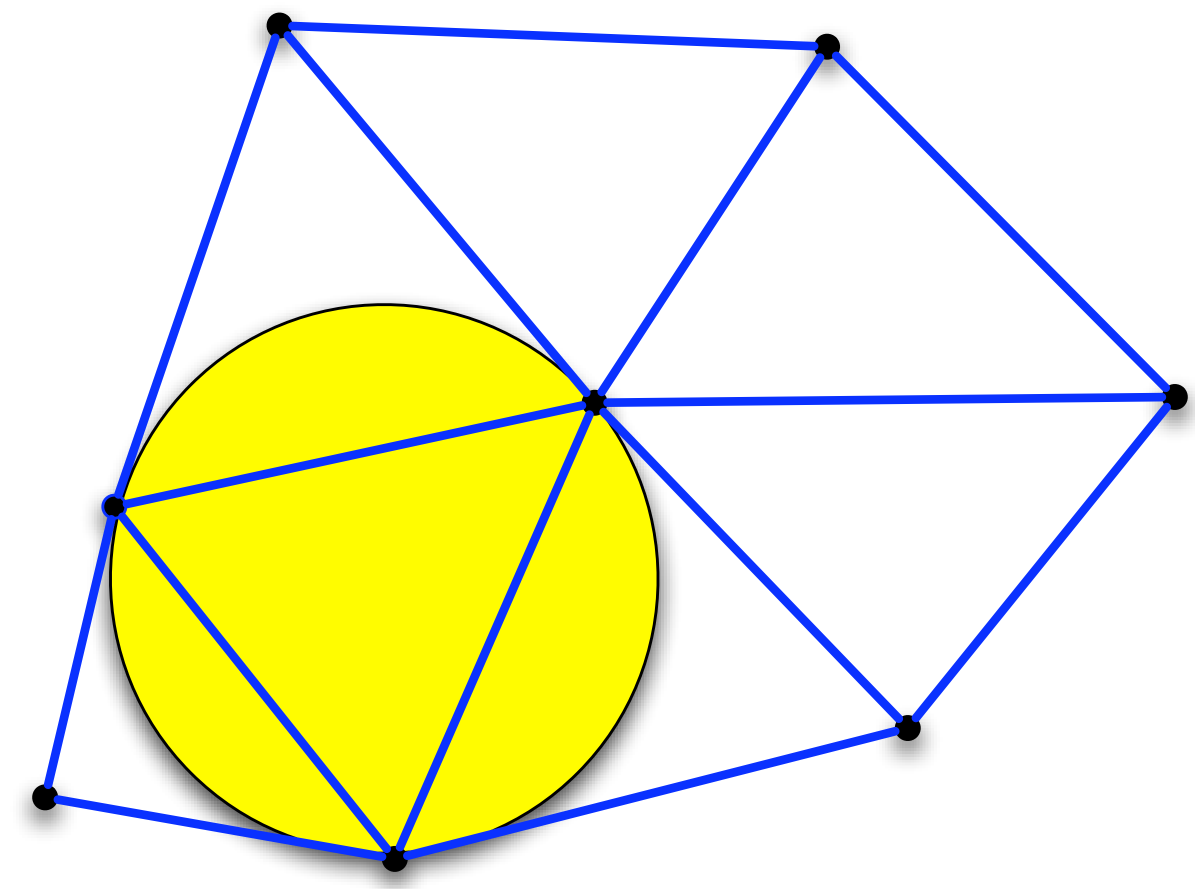
Duale Graphen

Den duale Graph G^* eines geometrischen Graphs G (auf einer Kugeloberfläche) erhält man, indem man folgendermaßen vorgeht.

- Im Innern jeder Fläche F von G wählt man einen Punkt p_F^*. Diese Punkte werden die Knoten von G^*
- Für jede Kante e von G mit angrenzender Fläche F und F' verbinde p_F^* mit $p_{F'}^*$ mit einer Kante e^*, die nur e und sonst keine andere Kante kreuzt.

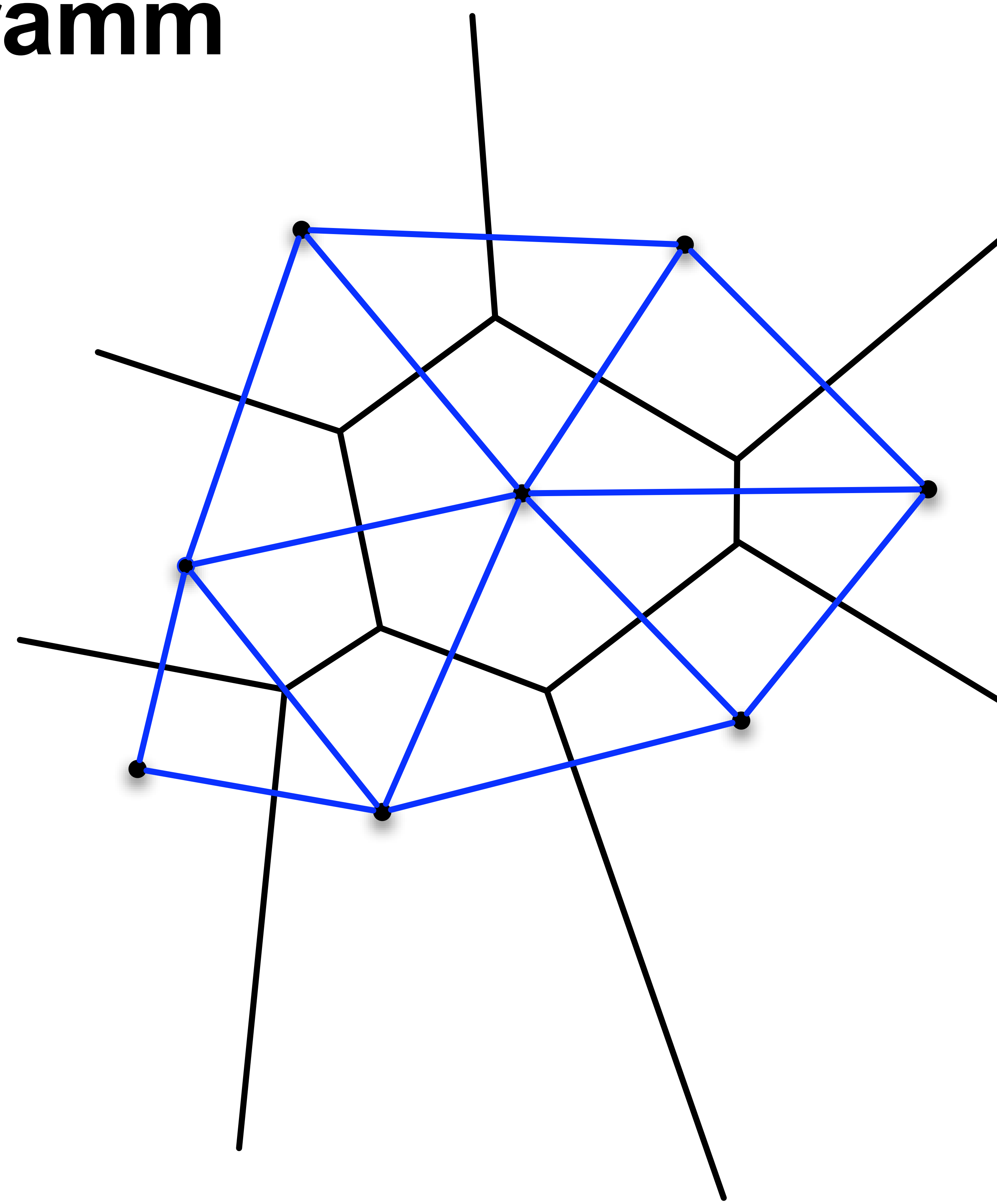
Delaunay-Triangulation

- **Definition**
  - Für Punkte in allgemeiner Lage besteht eine Delaunay-Triangulation aus Dreiecken, welche die Umkreisbedingung erfüllen:
    - Der Umkreis jedes Dreiecks darf keine anderen Knoten der gegebenen Knotenmengen enthalten.
- **Allgemeine Lage:**
  - Keine drei Punkte sind auf einer Gerade
  - Keine vier Punkte auf einem Kreisbogen
  - Diese kann man erhalten, indem man jeden Punkt um einen infinitesimal kleinen Vektor in zufällige Richtung verschiebt



Delaunay aus Voronoi-Diagramm

- **Alternative Darstellung der Delaunay-Triangulation**
  - Gegeben Menge V und Voronoi-Diagramm VD(V)
  - Falls für p,q∈V die Regionen VR(p,V) und VR(q,V) als Rand eine Strecke besitzen, füge (p,q) zur Delaunay-Triangulation



Delaunay aus Voronoi-Diagramm

Lemma 4 *Die Delaunay-Triangulation ist eine geometrische Realisierung des dualen Graphen des Voronoi-Diagramms.*

- **Da V in allgemeiner Lage, d.h. Keine vier Punkte auf einem Kreisbogen**
  - Kein Voronoi-Punkt hat mehr als drei Kanten (wegen Kreislemma)
  - Damit hat jeder Fläche des dualen Graphen nur drei benachbarte Kanten

    $\Rightarrow$ Delaunay-Triangulation besteht nur aus Dreiecken
- **Kreislemma impliziert Delauney-Umkreis-Eigenschaft**

ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Algorithmen für drahtlose Netzwerke

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

CoNe Freiburg

IIF INSTITUT FÜR INFORMATIK FREIBURG