ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Algorithmen für drahtlose Netzwerke

Frequenzzuweisung

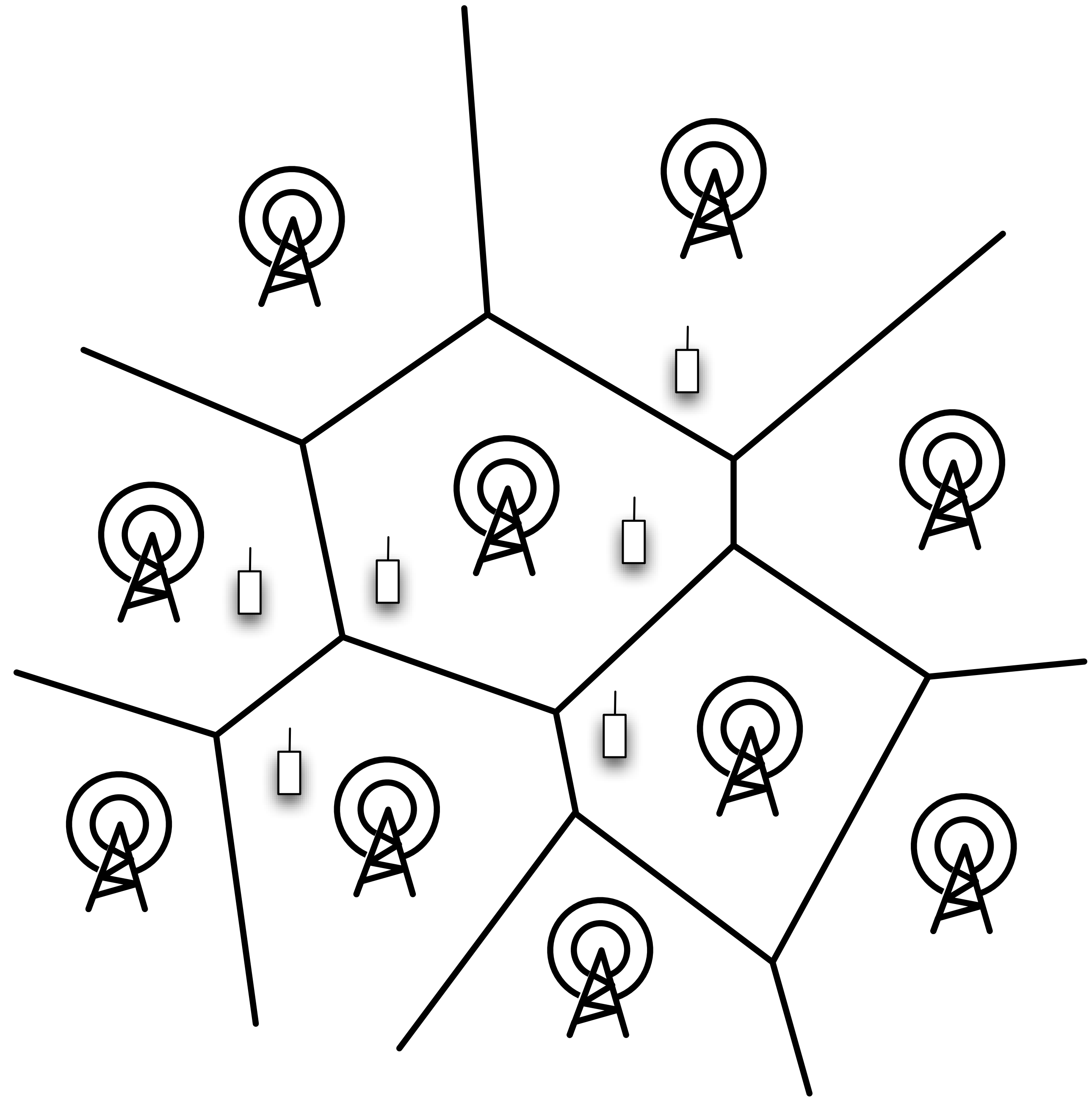
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

CoNe Freiburg

IIF
INSTITUT FÜR INFORMATIK FREIBURG

Zellulare Netze

- **Ursprüngliche Problemstellung:**
  - Starres Frequenzmultiplexing für gegebene Menge von Basisstationen
- **Gegeben:**
  - Positionen der Basisstationen
- **Gesucht:**
  - Frequenzzuteilung, welche die Interferenzen minimiert
- **Wie modelliert man zulässige Frequenzzuteilungen?**

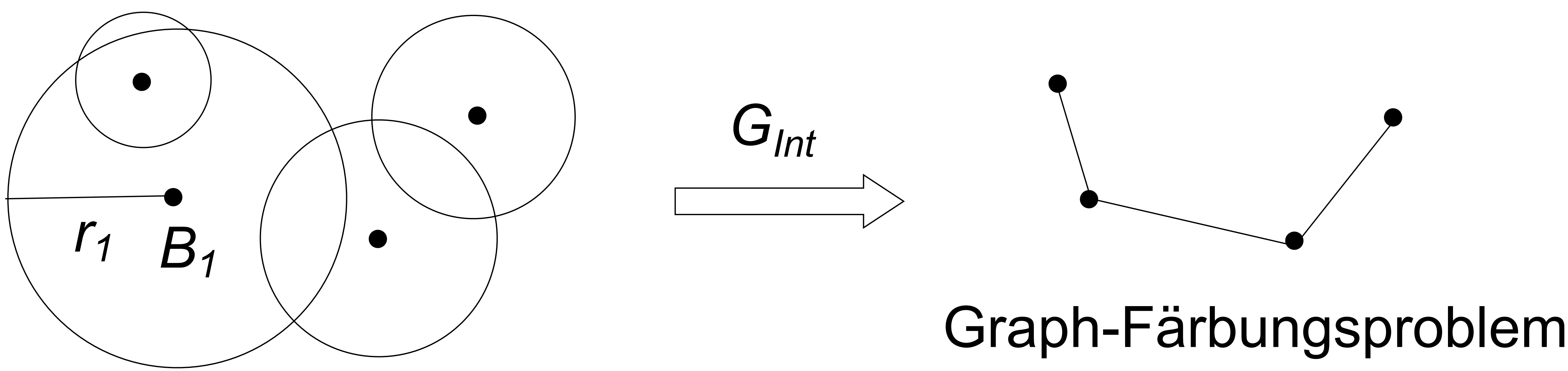


Frequenzzuweisung (I)

- **Gegeben:**
  - Punktemenge $V \subseteq \mathrm{IR}^2$ von n Basisstationen $B_1, \ldots, B_n$
  - Jede Basisstation sendet in ein Gebiet
- **Gesucht:**
  - Funktion $f: V \rightarrow \mathrm{IN}$, die einer Basisstation eine Übertragungsfrequenz zuordnet unter Berücksichtigung von Frequenz- und Abstandsbedingungen
- **Beispiele für Bedingungen:**
  - Minimiere die Anzahl der vergebenen Frequenzen
  - Minimiere die Breite des Frequenzspektrums
  - Minimiere die Anzahl der Wellenüberlagerungen (Interferenzen)

Frequenzzuweisung (II) Modellierung

- **Interferenz-Graph G_{Int}:**
  - Knoten sind die Basisstationen
  - Kanten kennzeichnen Interferenzen zwischen den Basisstationen



Graph-Färbungsproblem

Allgemeine Graph-Färbung

- **k-Knotenfärbung**
  - Sei G=(V,E) ein ungerichteter Graph.
  - Eine Abbildung $f:V \rightarrow F$ heißt k-Knotenfärbung,
    - falls $f(u) \neq f(v)$ für $\{u,v\} \in E$ und $|F|=k$.
- **Chromatische Zahl $\chi(G)$**
  - ist die kleinste Zahl k, für die es in G eine k-Knotenfärbung gibt.
- **Cliquen-Zahl $\omega(G)$**
  - ist die größte Zahl von Knoten, die in G einen vollständigen Teilgraph bilden.
- **Zusammenhang ($\Delta(G)$ Grad von G)**
  - $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Komplexität

- **Der Grad ergibt sich direkt aus dem Interferenzgraph**
- **Cliquen-Zahl**
  - Die Berechnung der Cliquen-Zahl $\omega(G)$ ist NP-schwierig
  - Berechenbar in Zeit $O(n^{\omega(G)})$
- **Färbungszahl**
  - Färbung eines Graphs ist NP-schwierig zu berechnen
  - Berechenbar in Zeit $O(\omega(G)^n)$

Approximationsalgorithmen

- **Sei P(I) die Lösung eines Optimierungsproblems für eine Instanz I**
  - Hier: I = G [gegebener ungerichteter Graph]
  - P(I) = χ(G)   [Färbungszahl von G]
- **Definition:**
  - P ist mit absoluter Güte f(n) approximierbar, wenn es Polynomialzeitalgorithmus A gibt, so dass für alle Instanzen I der Größe n gilt:

    $$| P(I) - A(I) | \leq f(n)$$

  - P läßt sich mit relativer Güte g(n) approximieren, wenn es einen Polynomialzeitalgorithmus A gibt, so dass für alle I der Größe n gilt:

    $$\max\left\{\frac{P(I)}{A(I)}, \frac{A(I)}{P(I)}\right\} \leq g(n)$$

Resultate zur Graph-Färbung

- **Graph-Färbung ist NP-schwierig**
  - auch nicht approximierbar mit Faktor besser als n^ε für $\varepsilon>0$ unter der Annahme NP≠P.
- **„Besitzt der planare Graph eine 3-Knotenfärbung?“ ist auch NP-vollständig**
- **Aber:**
  - Jeder planare Graph kann in Polynomzeit mit 4 Farben knotengefärbt werden
  - Jeder Graph kann in Polynomzeit auf 2-Knotenfärbbarkeit überprüft werden
  - Es gibt einen Approximationsalgorithmen der Güte O(n/log n) für das allgemeine Färbungsproblem

Approximationsalgorithmus für Knotenfärbung (I)

- **Independent Set Problem (NP-vollständig):**
  - Sei $G=(V,E)$ ein Graph, $U \subseteq V$. U heißt **unabhängig**, falls: $\{u,v\} \notin E$ für alle $u,v \in U$
  - Independent Set: bestimme möglichst große unabhängige Menge

Approximationsalgorithmus für Knotenfärbung (II)

- **Algorithmus GreedyIS:**

  $U=\emptyset$, $G=(V,E)$

  while V nicht leer **do**

  Erzeuge zugehörigen Graph G zu V

  Wähle Knoten u mit minimalem Grad

  Lösche u und alle Nachbarn von u in G aus V

  Füge u zu U hinzu

  od

  Ausgabe U

- **GreedyIS**
  – berechnet eine nicht erweiterbare unabhängige Knotenmenge
  – Laufzeit: $O(|V|+|E|)$

Approximationsalgorithmus für Knotenfärbung (III)

- **Algorithmus GreedyCol:**

  G=(*V*,*E*), Farbe=1;

  while *V* nicht leer **do**

  Erzeuge *G* aus *V* und bestimme *U* mit GreedyIS(*G*)

  Färbe alle Knoten in *U* mit Farbe

  Entferne *U* aus *V* und erhöhe Farbe um 1

  od

  Ausgabe Knotenfärbung
- **GreedyCol berechnet in polynomieller Zeit eine Knotenfärbung mit O(n/log n) Farben**
  - Es gibt noch bessere Approximationsalgorithmen

Modellierung

- **Färbungsmodell**
  - Benachbarte Felder müssen verschiedene Frequenzen besitzen
  - Reduziert sich auf Knotenfärbung des Interferenzgraphen
- **Vorteil**
  - Einfach beschreibbares, anschauliches Modell
- **Nachteile**
  - Das Färbungsproblem ist algorithmisch nicht effizient lösbar/ approximierbar, wenn nicht P=NP
  - Modelliert die Praxis schlecht, da Zusammenhang zwischen hoher Sendeenergie und Beeinflussung benachbarter Frequenzräume besteht

Labelling versus Färbung

- **Färbung**
  - Verwendung wiederverwendbarer Frequenzen
  - Minimiere Gesamtanzahl Farben=Frequenzen unter Berücksichtung von Frequenzabständen
- **Labelling**
  - Jede Frequenz wird nur einmal vergeben
  - Frequenzabstände sind einzuhalten
  - Minimiere verwendetes Spektrum
- **Mengen-(Färbung/Labelling)**
  - Statt einer Frequenz wird eine Menge von Frequenzen einer Station zugewiesen
- **Abstandsfunktion d durch Abstand im (Interferenz-) Graphen**

ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Algorithmen für drahtlose Netzwerke

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

CoNe
Freiburg

IIF
INSTITUT FÜR
INFORMATIK
FREIBURG