Informatik III

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

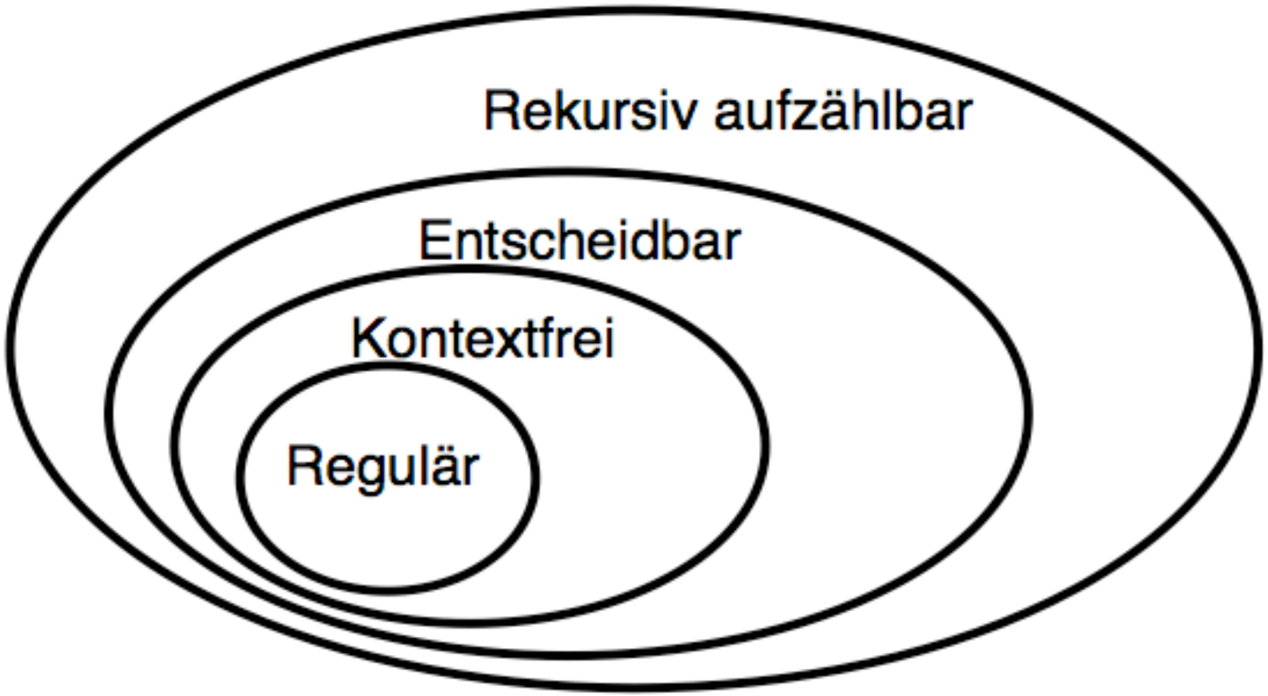
Arne Vater

Wintersemester 2006/07
11. Vorlesung
30.11.2006

Beziehungen zwischen den Sprachen

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

- **Jede reguläre Sprache ist eine kontextfreie Sprache.**
- **Jede kontextfreie Sprache ist eine entscheidbare Sprache.**
  - folgt aus der Entscheidbarkeit des Wortproblems der kontextfreien Sprachen.
- **Jede entscheidbare Sprache ist eine rekursiv aufzählbare Sprache.**



Rekursive und rekursiv aufzählbare Sprachen

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

- **Eine Sprache L heißt *rekursiv aufzählbar*, falls es eine Turingmaschine M gibt, die L akzeptiert**

- **Eine Sprache L heißt *rekursiv* oder *entscheidbar*, falls es eine Turingmaschine M gibt, die L entscheidet**

Aufzählen & Abzählen

Warum rekursiv aufzählbar rekursiv aufzählbar heißt

- **Definition**
  - Eine aufzählende Turing-Maschine ist eine Turingmaschine, die mit einem zusätzlichen speziellen Ausgabe-Band ausgestattet ist.
    - Die Turing-Maschine muss nicht unbedingt halten
    - Auf dem Ausgabeband kann die Turingmaschine nur nach rechts gehen.
    - Wörter sind durch das Sondersymbol "_" von einander getrennt und können damit weder gelöscht noch überschrieben werden
    - Die Vereinigung aller jemals erzeugten Wörter, beschreibt die Sprache der aufzählenden Turing-Maschine
- **Theorem**
  - Eine Sprache ist rekursiv aufzählbar genau dann wenn eine aufzählende Turing-Maschine sie beschreibt.

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Was heißt abzählbar im Gegensatz zu rekursiv aufzählbar?

- **Definition**
  - Eine Menge M heißt abzählbar, wenn es eine (nicht unbedingt berechenbare) Funktion $f:\mathbf{N} \rightarrow M$ gibt,
    - so dass für jedes $m \in M$ eine natürliche Zahl $i \in \mathbf{N}$ gibt mit $f(i) = m$.
- **Lemma**
  - Jede rekursiv aufzählbare Menge ist abzählbar
  - Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Hilberts Hotel

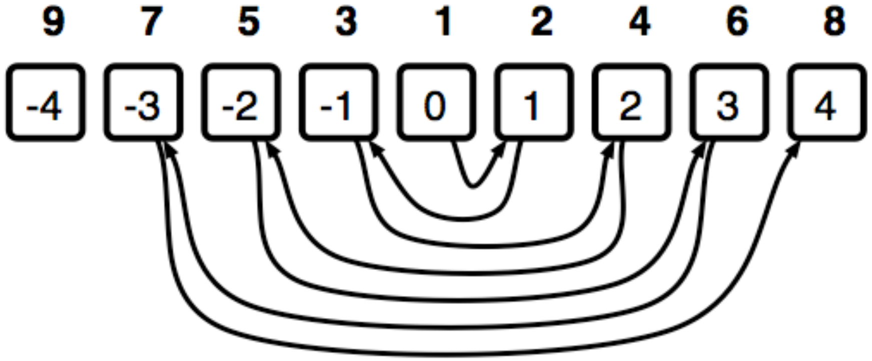
- **Hilberts Hotel hat unendlich viele Zimmer**
- **Alle Zimmer sind ausgebucht**
  - Es sind also schon unendlich viele Gäste da!

- **Kann der Hotelier dennoch weitere Gäste aufnehmen?**
  - Ein neuer Gast
  - Ein Bus mit unendlich vielen neuen Gästen
  - Unendlich viele Busse mit unendlich vielen neuen Gästen

Die ganzen Zahlen sind abzählbar

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

- **Theorem**
  - Die Menge der ganzen Zahlen ist abzählbar
- **Beweis**
  - Konstruiere eine Abzählung aller ganzen Zahlen:
  - 0 erhält die Nummer 1
  - alle positiven Zahlen x erhalten die Nummer 2x
  - alle negativen Zahlen x erhalten die Nummer 2(-x)+1



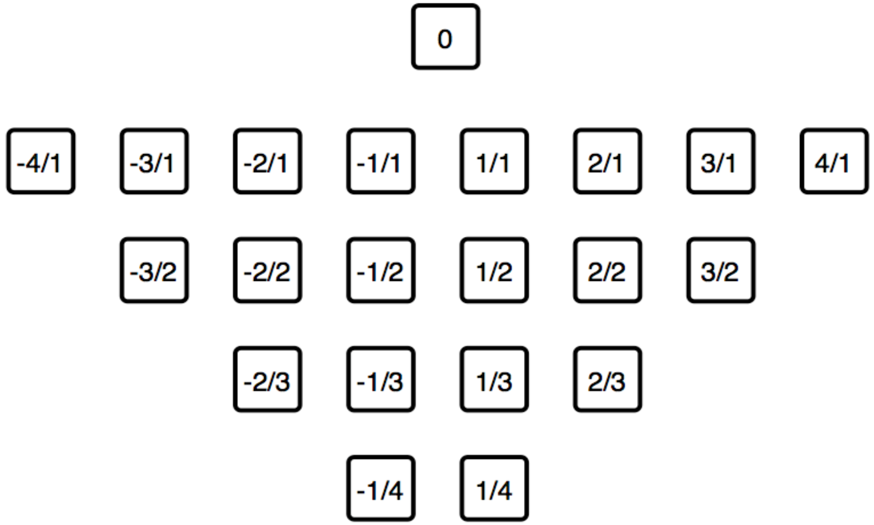
Die rationalen Zahlen sind abzählbar

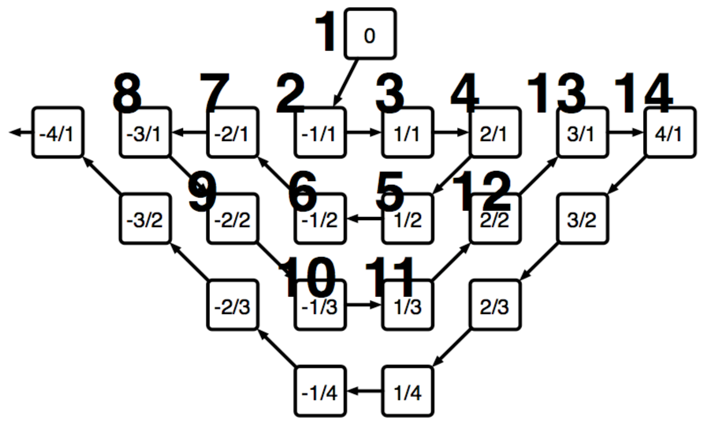
- **Theorem**
  - Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar
- **Beweis**
  - Die rationalen Zahlen sind definiert als Tupel aus einer ganzen Zahl und einer natürlichen Zahl
  - Zähle alle diese Paare geeignet auf
    - Mehrfachaufzählungen sind irrevelant (=egal)

Die rationalen Zahlen sind abzählbar

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

- **Theorem**
  - Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar
- **Beweis**
  - Die rationalen Zahlen sind definiert als Tupel aus einer ganzen Zahl und einer natürlichen Zahl
  - Zähle alle diese Paare geeignet auf
    - Mehrfachaufzählungen sind irrevelant (=egal)





Die reellen Zahlen sind nicht abzählbar

- **Theorem**
  - Die Menge der reellen Zahlen sind nicht abzählbar
- **Beweis**
  - Betrachte alle reellen Zahlen aus [0,1[in der Dezimaldarstellung
  - Angenommen alle reellen Zahlen sind abzählbar mit $x_1, x_2, x_3, \ldots$

	1	2	3	4	5	...
$x_1 = 0,$	9	9	9	9	9	...
$x_2 = 0,$	6	4	2	5	2	...
$x_3 = 0,$	3	2	7	3	2	...
$x_4 = 0,$	6	7	2	1	6	...
$x_5 = 0,$	2	1	7	2	8	...
...	...	...	...	...	...	...

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Die reellen Zahlen sind nicht abzählbar

- **Theorem**
  - Die Menge der reellen Zahlen sind nicht abzählbar
- **Beweis**
  - Betrachte alle reellen Zahlen aus [0,1[in der Dezimaldarstellung
  - Angenommen alle reellen Zahlen sind abzählbar mit $x_1,x_2,x_3,\ldots$
  - Betrachte reelle Zahl z, wobei
    - j-te Ziffer ist 1, falls j-te Ziffer von x_j gerade ist
    - j-te Ziffer ist 2, falls j-te Ziffer von x_j ungerade ist
  - Diese Zahl hat auch einen Index i,
    - d.h. es gibt ein i mit x_i=z
    - wenn die Annahme stimmt

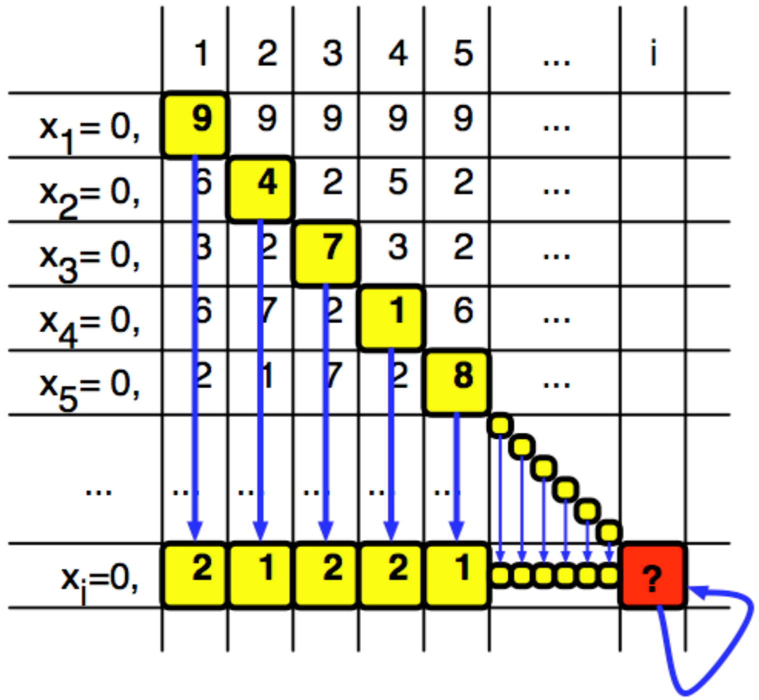
	1	2	3	4	5	...	i
x_1= 0,	**9**	9	9	9	9	...	
x_2= 0,	6	**4**	2	5	2	...	
x_3= 0,	3	2	**7**	3	2	...	
x_4= 0,	6	7	2	**1**	6	...	
x_5= 0,	2	1	7	2	**8**	...	
...	...	...	...	...	...	...	
x_i=0,	**2**	**1**	**2**	**2**	**1**	...	

j-te Ziffer von x_i ist 2, falls j-te Ziffer von x_j ungerade
ist 1, falls j-te Ziffer von x_j gerade

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Die reellen Zahlen sind nicht abzählbar

- **Theorem**
  - Die Menge der reellen Zahlen sind nicht abzählbar
- **Beweis**
  - Betrachte alle reellen Zahlen aus [0,1[in der Dezimaldarstellung
  - Angenommen alle reellen Zahlen sind abzählbar mit $x_1, x_2, x_3, \ldots$
  - Betrachte reelle Zahl z, wobei
    - j-te Ziffer ist 1, falls j-te Ziffer von x_j gerade ist
    - j-te Ziffer ist 2, falls j-te Ziffer von x_j ungerade ist
  - Diese Zahl hat auch einen Index i,
    - d.h. es gib ein i mit x_i=z
    - wenn die Annahme stimmt
  - Ist die i-te Ziffer von x_i jetzt gerade oder ungerade
    - weder noch: Widerspruch
  - Also ist die Annahme falsch



i-te Ziffer von x_i ist 2, falls i-te Ziffer von x_i ungerade
ist 1, falls i-te Ziffer von x_i gerade

Noch ein Beispiel

- **Theorem**
  - Die Menge aller Funktionen die von **N** auf {0,1} abbilden, ist nicht abzählbar.
- **Beweis:**
  - Angenommen es gibt eine Funktion die alle Funktionen $f_1,f_2,...$ abzählt.
  - Betrachte die Funktion $1-f_i(i)$.
  - Diese Funktion ist nicht in $f_1,f_2,...$, da für jedes i gilt $f_i(i) \neq 1-f_i(i)$.
  - Diese Funktion ist also in der Abzählung $f_1,f_2,...$ nicht enthalten (sollte aber).

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Diagonalisierung

- **Definition**
  - Eine Menge M heißt abzählbar, wenn es eine (nicht unbedingt berechenbare) Funktion f:**N** → M gibt,
    - so dass für jedes m ∈ M eine natürliche Zahl i ∈ **N** gibt mit f(i) = m.
- **Theorem**
  - Die Menge aller Funktionen die von **N** auf {0,1} abbilden, ist nicht abzählbar.
- **Beweis:**
  - Angenommen es gibt eine Funktion die alle Funktionen $f_1,f_2,\ldots$ abzählt.
  - Betrachte die Funktion $1-f_i(i)$.
  - Diese Funktion ist nicht in $f_1,f_2,\ldots$, da für jedes i gilt $f_i(i) \neq 1-f_i(i)$.
  - Diese Funktion ist also in der Abzählung $f_1,f_2,\ldots$ nicht enthalten (sollte aber).

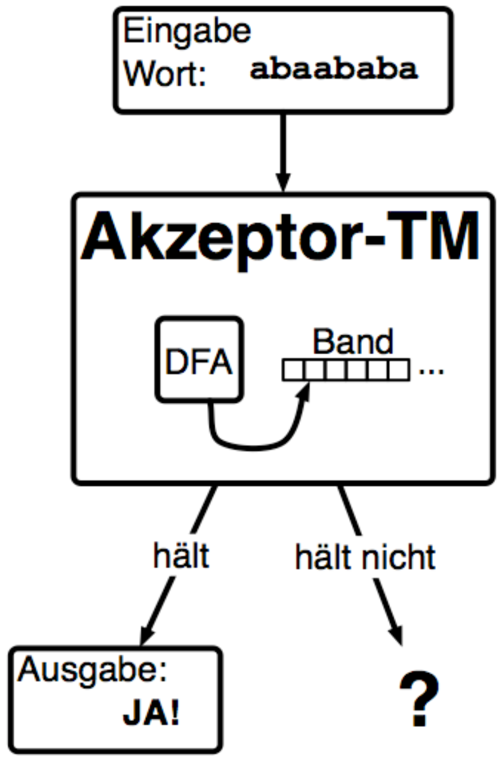
	1	2	3	4	5	...	i	...
$f_1(n)$	**0**	0	0	0	0	...		
$f_2(n)$	1	**1**	1	1	1	...		
$f_3(n)$	0	1	**0**	1	0	...		
$f_4(n)$	1	0	1	**0**	1	...		
$f_5(n)$	0	1	1	0	**1**	...		
...	...	...	...	...	...	...		
$f_i(n)=1-f_n(n)$	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	...	?	

Das TM-Wortproblem

- **Definition**
  - Das Wortproblem der Turing-Maschinen ist definiert als
  - gegeben:
    - eine Turingmaschine M
    - ein Wort w
  - gesucht:
    - akzeptiert M das Wort w?
- **Die alternative Darstellung als Sprache ist:**

$$\mathrm{A_{TM}} = \{\langle \mathrm{M}, \mathrm{w}\rangle \mid M \text{ ist eine TM und } M \text{ akzeptiert } w\}$$

  - hierbei ist <M,w> eine geeignete Kodierung der TM M und des Wortes w



Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Das TM-Wortproblem ist nicht entscheidbar

- **Theorem**
  - Die Sprache A_{TM} ist nicht rekursiv, d.h. das TM-Wortproblem ist nicht entscheidbar
- **Beweis**
  - **Annahme A_{TM} ist entscheidbar:**
    - Dann gibt es eine TM **MH**, die auf Eingabe M und w
      - immer hält und
      - folgendes berechnet:
  - MH(<M,w>) = $\chi_{A_{TM}}$(<M,w>)

$$\mathsf{H}(\langle \mathsf{M}, \mathsf{w} \rangle) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } M \text{ das Wort } w \text{ akzeptiert} \\ 0\,, & \text{falls } M \text{ nicht hält oder } w \text{ verwirft} \end{cases}$$

- **Konstruiere neue TM D**
- D = “Auf Eingabe <M>, wobei M TM ist
  1. Führe Berechnung von **MH** auf Eingabe <M, <M> > durch
  2. Falls MH akzeptiert, dann verwerfe
     Falls MH verwirft, dann akzeptiere
- Beachte:
  - <M, <M> > ist eine Kodierung aus
    - einer Turingmaschine M und
    - einer kodierten Turingmaschine
- **Fakt: D hält immer**
- **Fakt: D berechnet die folgende Funktion:**

$$\mathsf{D}(\langle \mathsf{M} \rangle) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls } M \text{ das Wort } \langle M \rangle \text{ akzeptiert} \\ 1\,, & \text{falls } M \text{ nicht hält oder } \langle M \rangle \text{ verwirft} \end{cases}$$

Beweis: Was berechnet D auf <D>?

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

- **Unter der Annahme, dass das TM-Wortproblem berechenbar ist:**
- **Fakt: TM D hält immer**
- **Fakt: TM D berechnet die folgende Funktion:**

$$\mathsf{D}(\langle \mathsf{M} \rangle) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls } M \text{ das Wort } \langle M \rangle \text{ akzeptiert} \\ 1\,, & \text{falls } M \text{ nicht hält oder } \langle M \rangle \text{ verwirft} \end{cases}$$

- **Was liefert nun D(<D>)?**
  - Entweder akzeptieren oder verwerfen
- **Akzeptieren?**
  - Falls D(<D>) akzeptiert, dann ist D(<D>)=0
  - Also D(<D>) verwirft ⇒ **Widerspruch**
- **Verwerfen**
  - Falls D(<D>) verwirft, dann ist D(<D>)=1
  - Also D(<D>) akzeptiert ⇒ **Widerspruch**

Grafische Darstellung des Beweises

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

➢ **Angenommen: Das TM-Wortproblem ist rekursiv!**

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	...
M_1	1	0	1	1	...
M_2	1	1	1	1	...
M_3	1	0	0	1	...
M_4	0	0	0	0	...
...	...	...	...	...	

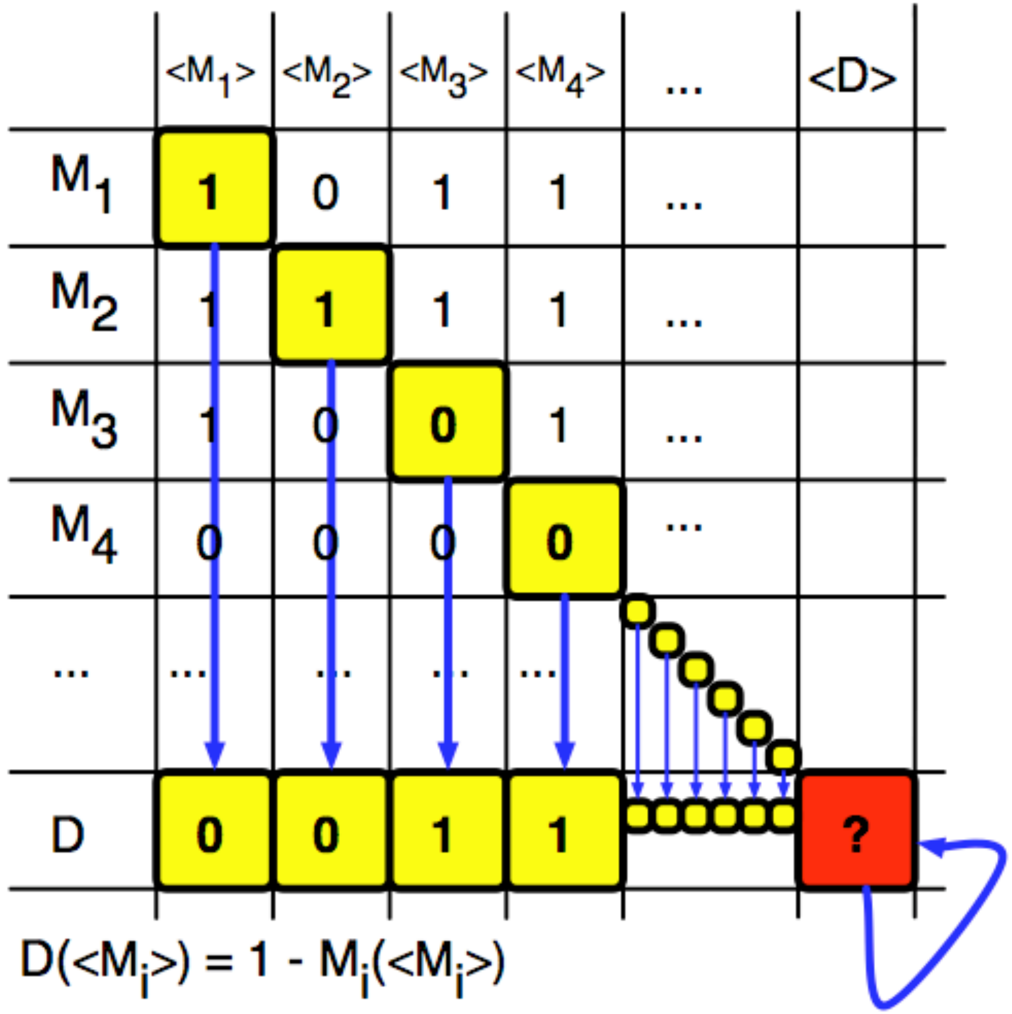
0: Turingmaschine hält und akzeptiert
1: Turingmaschine hält nicht oder verwirft

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	...
M_1	**1**	0	1	1	...
M_2	1	**1**	1	1	...
M_3	1	0	**0**	1	...
M_4	0	0	0	**0**	...
...	...	...	...	...	
D	**0**	**0**	**1**	**1**	...

$D(\langle M_i \rangle) = 1 - M_i(\langle M_i \rangle)$

Dial D for Diagonalization!

- **Angenommen: Das TM-Wortproblem ist berechenbar**
- **Dann kann D existieren!**
- **Das führt zu einem Widerspruch!**

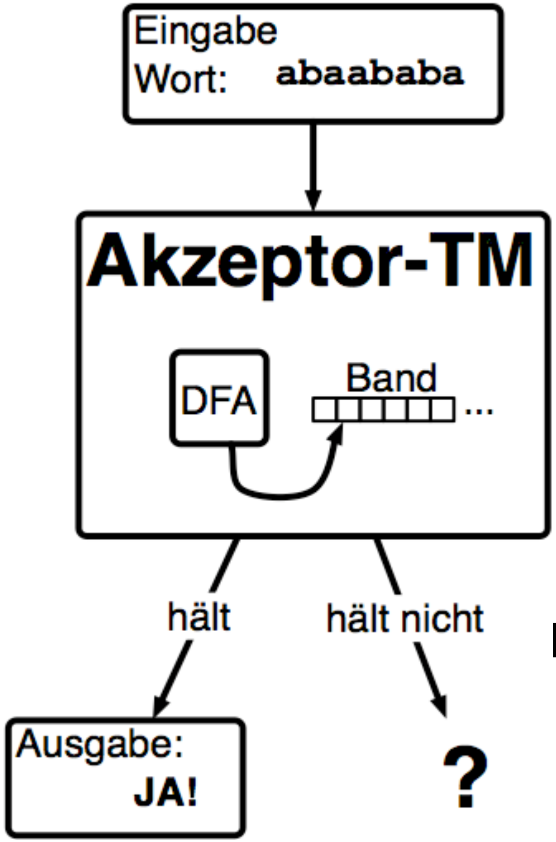


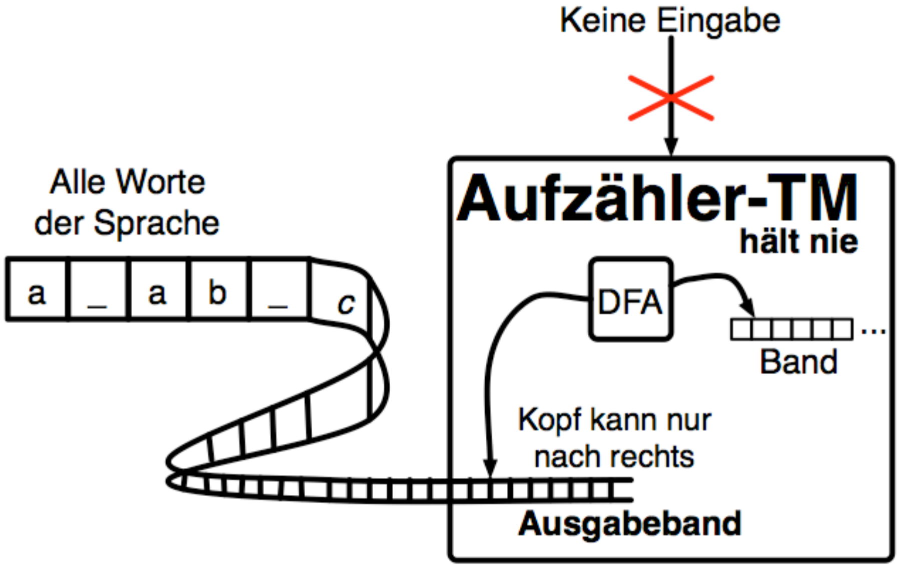
$D(<M_i>) = 1 - M_i(<M_i>)$

$D(<D>) = 1 - D(<D>)$?

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Wiederholung: Was ist rekursiv aufzählbar?

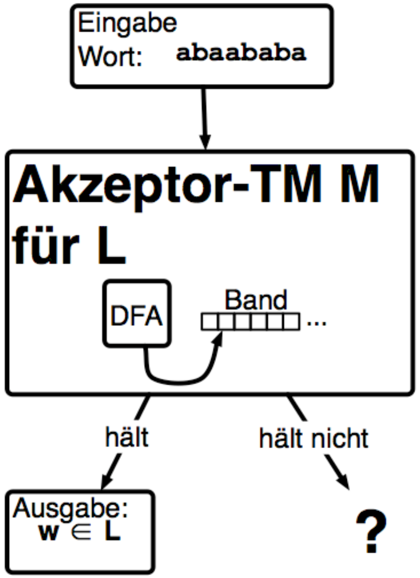


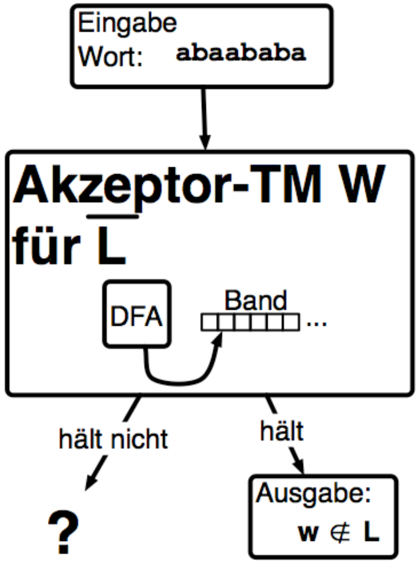


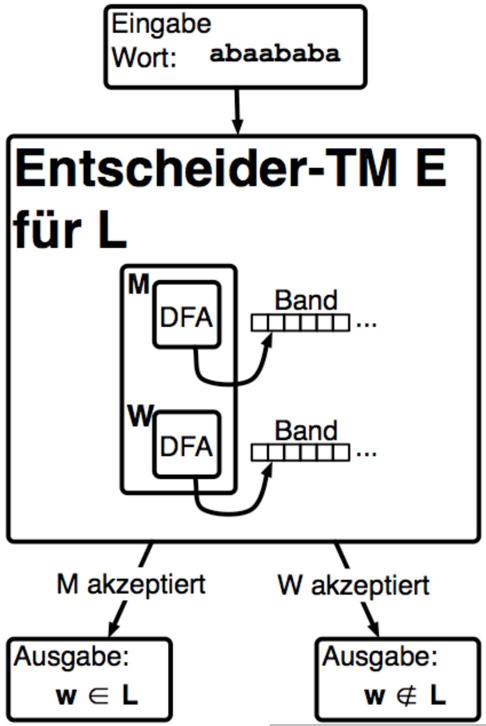
Komplement einer rekursiv aufzählbaren

Rekursiv = Aufzählbar + Ko Aufzählbar

- **Definition**
  - Eine Sprache ist **rekursiv ko-aufzählbar**, wenn das Komplement der Menge rekursiv aufzählbar ist.
- **Theorem**
  - Eine Sprache L ist rekursiv, genau dann
    - wenn sie rekursiv aufzählbar
    - und rekursiv ko-aufzählbar ist.
- **Beweis (Rückrichtung)**
  - Betrachte Akzeptor-TM M für L
  - und Akzeptor-TM W für $\Sigma^* \setminus L$
  - Konstruiere TM E für Eingabe x
    - Berechne parallel M(x) und W(x)
  - Falls M(x) zuerst akzeptiert:
    - akzeptiere
  - Falls W(x) zuerst akzeptiert:
    - halte und verwerfe
- **Beweis (Hinrichtung): Übung?**







Die Simulator-TM

- **Lemma**
  - Es gibt eine TM, die einen Schritt einer gegebenen TM M und einer Konfiguration berechnen kann,
    - d.h. die Nachfolgekonfiguration ausgeben
- **Beweis**
  - S verfügt über
    - ein Band für Kodierung der 1-Band-TM M
    - ein Band für den aktuellen Zustand
    - ein Band für den Bandinhalt von M mit markierter Kopfposition
    - ein Band für eigene Berechnungen (Zählen)
  - S sucht nach der aktuellen Kopfposition
  - S sucht in der Kodierung von M nach Übergang
  - S schreibt Buchstaben auf das “Band”-Band
  - S bewegt die Kopfposition und markiert entsprechendes Zeichen auf dem Band
  - S schreibt Folgezustand

Das TM-Wortproblem ist rekursiv aufzählbar

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

- **Theorem**
  - Die Sprache A_{TM} ist rekursiv aufzählbar.
- **Beweis**
  - Betrachte folgende TM A:
  - A = “Für gegebene TM M und Eingabe x
    - Kodiere Anfangskonfiguration für M und x für Simulator S
    - Solange kein akzeptierende Endkonfiguration
      - S simuliert einen Schritt von M
    - Falls akzeptierende Endkonfiguration erreicht wird, halte und akzeptiere”
- **Beobachtung:**
  - A akzeptiert genau dann, wenn M die Eingabe x akzeptiert

Eine nicht rekursiv aufzählbare Sprache

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

- **Theorem:**
  - Das Komplement der Sprache A_{TM} des TM-Wortproblems ist nicht rekursiv aufzählbar

- **Beweis**
  - Angenommen doch.
  - Dann ist A_{TM} rekursiv aufzählbar und rekursiv ko-aufzählbar
  - dann ist A_{TM} rekursiv (also entscheidbar).
  - **Widerspruch**!

Ende der 11. Vorlesung

Informatik III
Arne Vater
30.11.2006

CoNe Freiburg

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer