Christian Schindelhauer

Freiburg, den 25. Januar 2007
Besprechung ab dem 29. Januar 2007

Übungen zur Vorlesung
Informatik-III
Winter 2006/2007
Blatt 12

AUFGABE 44:
Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Beweisen Sie die Korrektheit oder geben Sie Gegenbeispiele an.

1. Wenn $L \in \mathcal{NP}$ und $L \leq_{m,p} L'$ dann ist
   (a) $L' \in \mathcal{NP}$,
   (b) L' $\mathcal{NP}$-schwierig,
   (c) L' $\mathcal{NP}$-vollständig.
2. Wenn L $\mathcal{NP}$-vollständig ist und $L \leq_{m,p} L'$, so ist
   (a) $L' \in \mathcal{NP}$,
   (b) L' $\mathcal{NP}$-schwierig,
   (c) L' $\mathcal{NP}$-vollständig.
3. Wenn L $\mathcal{NP}$-schwierig ist und $L \leq_{m,p} L'$, so ist
   (a) $L' \in \mathcal{NP}$,
   (b) L' $\mathcal{NP}$-schwierig,
   (c) L' $\mathcal{NP}$-vollständig.

AUFGABE 45:
In einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißt eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ unabhängig, wenn keine Kante zwischen zwei Knoten aus V' existiert. Das *Independent Set Problem* IP enthält dann alle Paare (G, k) von ungerichteten Graphen und natürlichen Zahlen, für die G eine unabhängige Knotenmenge mit k Knoten enthält.
Zeigen Sie, dass IP $\mathcal{NP}$-vollständig ist (Tipp: CLIQUE).

AUFGABE 46:

1. Zeigen Sie, dass SI $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

   Die Sprache SI (*Subgraph Isomorphism*) besteht aus allen Paaren $(G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2))$ von ungerichteten Graphen, für die G_1 isomorph in G_2 eingebettet werden kann, d.h. es existieren $V \subseteq V_2, E = E_2 \cap \{\{u,v\} \mid u,v \in V\}$ und eine bijektive Abbildung $f : V_1 \to V$, so dass gilt:

$$\{u,v\} \in E_1 \iff \{f(u), f(v)\} \in E$$

2. Zeigen Sie, dass GI auf SI reduziert werden kann.

   Die Sprache GI (*Graph Isomorphism*) besteht aus allen Paaren $(G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2))$ von ungerichteten Graphen, für die G_1 isomorph zu G_2 ist.

3. Was folgt daraus für GI?

AUFGABE 47:
Betrachten Sie das Optimierungsproblem von 3-SAT. Gegeben ist eine 3-CNF Formel, in der in jeder Klausel drei unterschiedliche Literale vorkommen. Ziel ist es, eine Variablenbelegung zu finden, die möglichst viele Klauseln zu erfüllen.
Finden Sie einen Algorithmus der (im Erwartungswert) eine Approximationsgüte von $8/7$ hat. Gehen Sie hierbei wie folgt vor:

1. Betrachten Sie eine erfüllbare 3-CNF und eine zufällige Belegung der Variablen. Bestimmen Sie die erwartete Anzahl der hierbei erfüllten Klauseln.

2. Betrachten Sie eine nicht erfüllbare 3-CNF-Instanz und bestimmen sie die erwartete Anzahl der erfüllten Klauseln bei zufälliger Belegung in Abhängigkeit der optimalen Anzahl.

3. Geben Sie nun den Approximationsalgorithmus an.