CoNe
Freiburg

Informatik III

4. Komplexitätstheorie

4.1 Zeitklassen und Turing-Maschinen

Christian Schindelhauer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Wintersemester 2007/08

Komplexitätstheorie

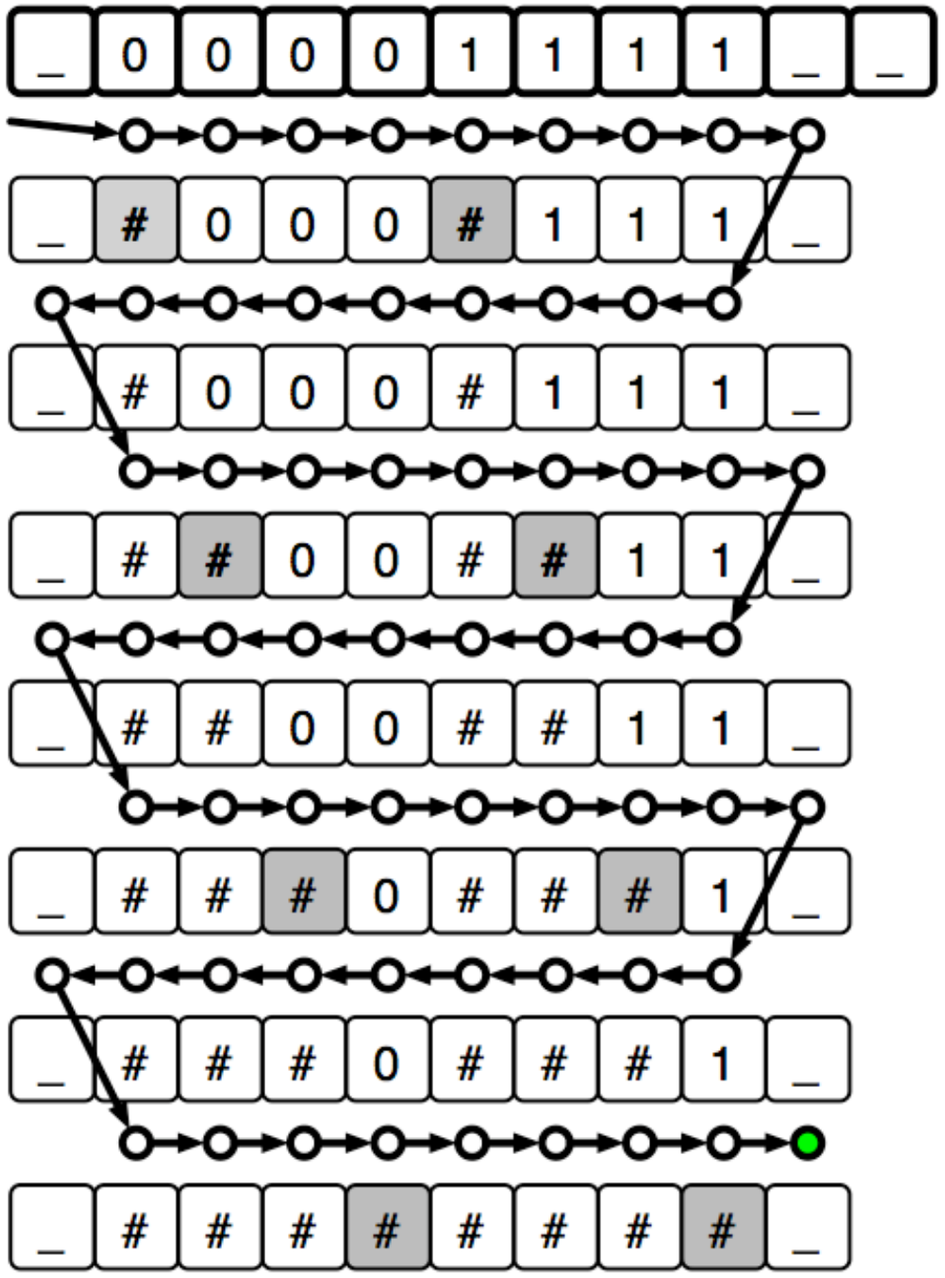
Zeitklassen

2

Laufzeit einer TM - Beispiel

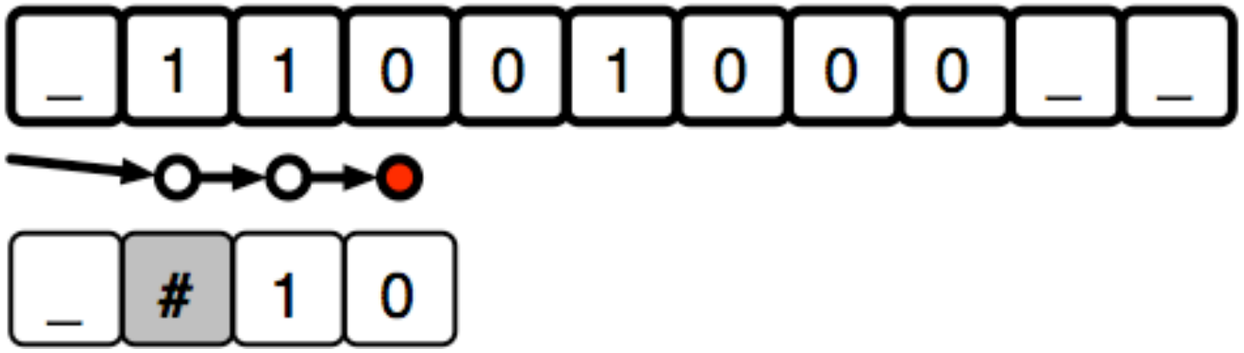
- **Beispiel: A = $\{0^k1^k \mid k \geq 0\}$**

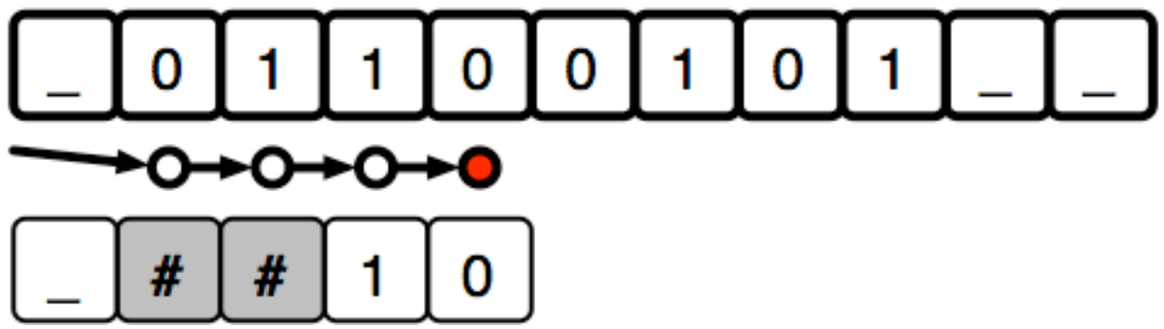
- **Maschine M1 für A: “Für Eingabe w:**
  - Laufe von links nach rechts über das Band und verwerfe, falls eine 0 rechts von einer 1 gefunden wird
  - Wiederhole falls mindestens eine 0 und eine 1 auf dem Band sind:
  - Laufe auf den Band und lösche eine 0 und eine 1
  - Falls 0er oder 1er noch bleiben, verwerfe.
    Ansonsten, akzeptiere.



Average versus Worst-Case-Laufzeit

- **Im schlimmsten (worst-case) Laufzeitfall ist das Wort in A**
- **Dann muss die TM M_1 alle 0er und 1er auskreuzen:**
  - Das macht k Runden
- **In jeder Runde muss die TM einmal die gesamte Eingabe der Länge n=2k durchlaufen**
- **Die Gesamtlaufzeit ist immer höchstens $4k^2+2k = n(n-2)$**
- **Tatsächlich ist aber die erwartete Laufzeit kleiner als 5**
  - Für ein zufälliges Wort ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 0 rechts von einer 1 steht an jeder Stelle 1/2.
- **Offensichtlich gibt die Average-Laufzeit hier nicht das interessante Verhalten der TM wieder**
- **Daher betrachtet die Komplexitätstheorie zumeist nur Worst-Case-Laufzeiten**





4

Ein Zeit-Komplexitätsmaß

- **Definition**
  - Sei M eine deterministische Turing-Maschine, die auf allen Eingaben hält.
  - Die **Laufzeit (Zeitkomplexität)** von M ist eine Funktion f: N→N,
    - wobei f(n) die maximale Anzahl von Schritten von M beschreibt auf einer Eingabe der Länge n.
  - Falls f(n) die Laufzeit einer TM M ist, nennt man M auch eine **f(n)-Zeit-Turing-Maschine**
    - z.B. Linear-Zeit-TM für f(n) = c n für eine Konstante c
    - z.B. Quadrat-Zeit-TM für f(n) = c n^2 für eine Konstante c
    - z.B. Polynom-Zeit-TM für f(n) = c n^k für Konstanten c und k

- Zumeist beschreibt n die Eingabelänge.

Komplexitätstheorie

Asymptotische Wachstums-klassen

6

Laufzeiten im Vergleich

- **Wie kann man Zeitkomplexitäten vergleichen?**
- **Beispiel:**

	100 n		**versus n^2**	**versus $2^n/1000$**
n=1	100		1	0,002
n=2	200		4	0,004
...	...		...	...
n=10	1.000		100	1,024
...	...	...	...	
n=20	2.000		400	1049
n=21	2.100		481	2098
...	...		...	...
n=100	10.000		10.000	1.27×10^{27}
...	...		...	...
n=1.000	100.000		1.000.000	1.07×10^{298}

- **Für große Eingabelängen spielen die konstanten Faktoren eine untergeordnete Rolle**
  - Hardware wird jedes Jahr (noch) um einen konstante Faktor schneller
  - Problemgrößen wachsen auch jedes Jahr

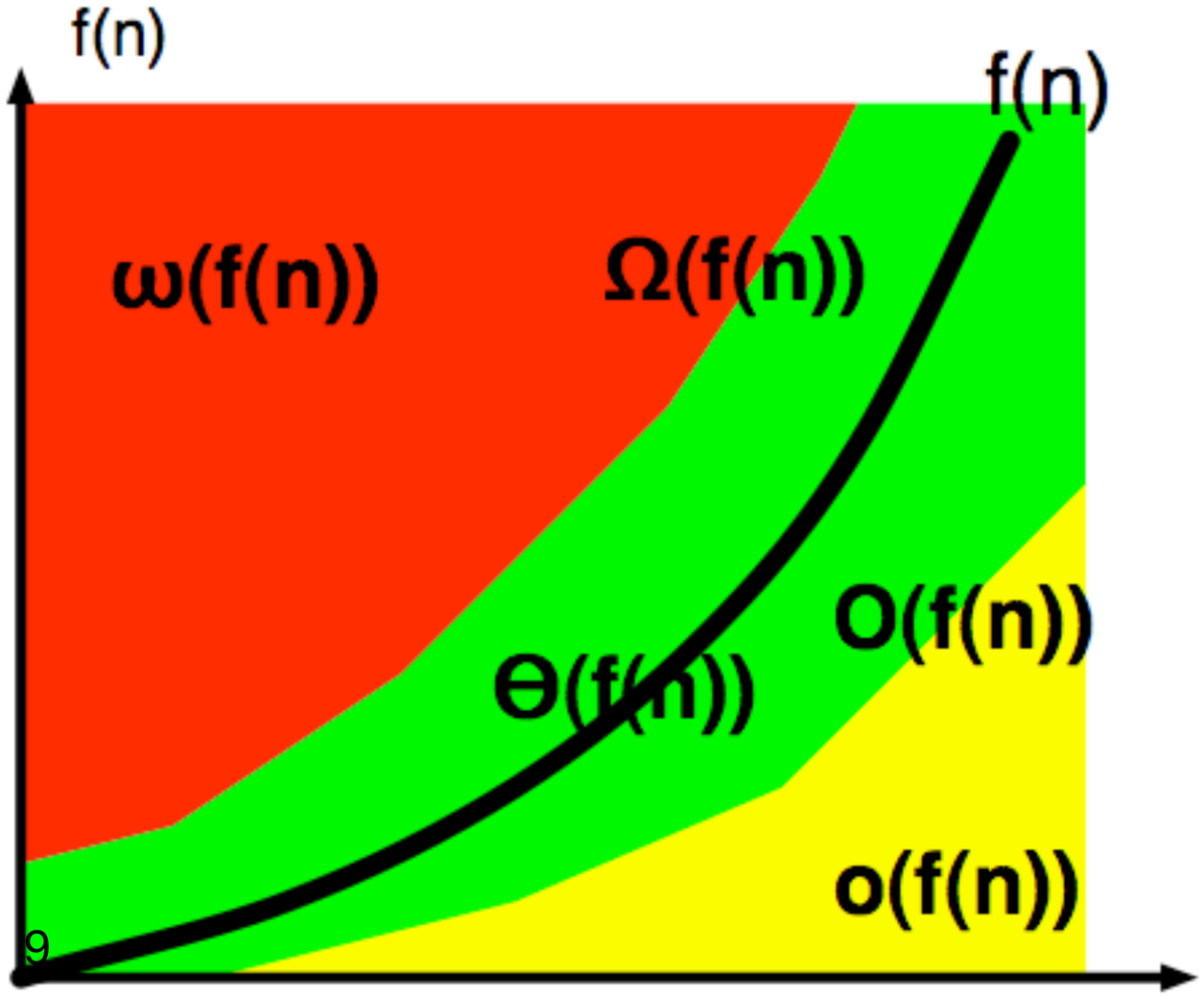
Definition der Asymptotik

$$f \leq_{ae} g \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists n_0 \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq n_0 : \quad f(n) \leq g(n) \; .$$

$$\begin{aligned}
O(g) &:= \{f \mid \exists k \in \mathbb{R} \quad f \leq_{ae} k \cdot g\} \; , \\
o(g) &:= \{f \mid \forall k \in \mathbb{R}^+ \quad k \cdot f \leq_{ae} g\} \; , \\
\omega(g) &:= \{f \mid \forall k \in \mathbb{R}^+ \quad k \cdot g \leq_{ae} f\} \; , \\
\Omega(g) &:= \{f \mid \exists k \in \mathbb{R} \quad g \leq_{ae} k \cdot f\} \; , \\
\Theta(g) &:= O(g) \quad \cap \quad \Omega(g) \; .
\end{aligned}$$

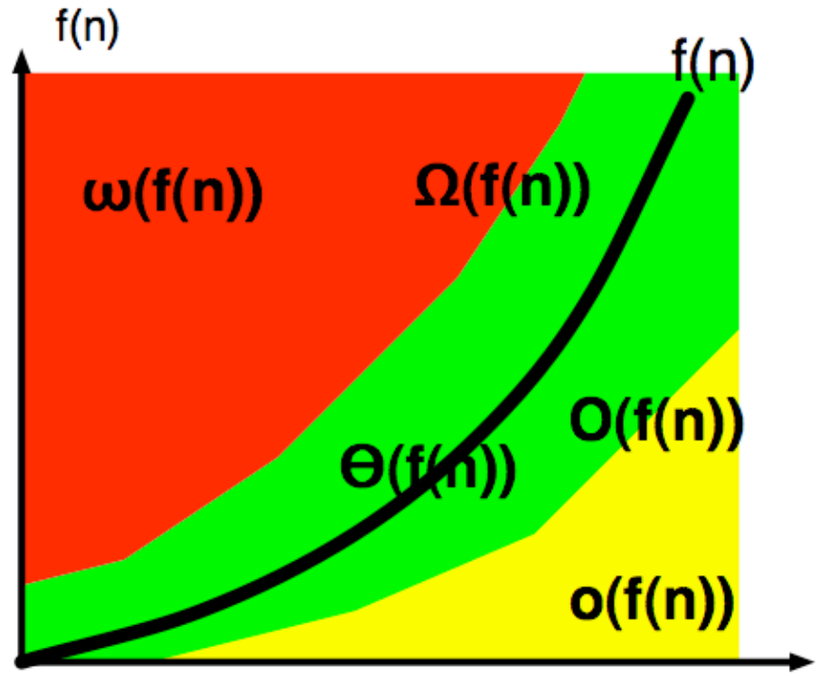
Die asymptotischen Wachstumsklassen

$$
\begin{aligned}
O(g) &:= \{f \mid \exists k \in \mathbb{R} \quad f \leq_{ae} k \cdot g\}, \\
o(g) &:= \{f \mid \forall k \in \mathbb{R}^+ \quad k \cdot f \leq_{ae} g\}, \\
\omega(g) &:= \{f \mid \forall k \in \mathbb{R}^+ \quad k \cdot g \leq_{ae} f\}, \\
\Omega(g) &:= \{f \mid \exists k \in \mathbb{R} \quad g \leq_{ae} k \cdot f\}, \\
\Theta(g) &:= O(g) \cap \Omega(g).
\end{aligned}
$$



Techniken und Tricks

- **Wachstumsklassen erleichtern die Analyse.**
- **Techniken:**
  - Falls die Funktion ein Polynom $a_0+a_1n+a_2n^2+...+a_kn^k$ ist und ak>0 , ist die Wachstumsklasse: Θ(nk)
  - Falls f ∈ O(g), dann ist f+g ∈ O(g).
  - f ∈ o(g) genau dann wenn g ∈ ω(f)
  - f ∈ O(g) genau dann wenn g ∈ Ω(f)
- **Eselsbrücken:**
  - o,O bedeutet: “kleiner”, “kleiner gleich”
  - ω, Ω bedeutet: “größer”, “größer gleich”
  - Θ bedeutet O und Ω - alles Großbuchstaben
    - also “asymptotisch gleich”
- **Theorem:**



$$f \in o(g) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$$f \in O(g) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leq c \text{ für eine Konstante } c$$

Korrekte und “schlampige” Notationen

- **Elemente der Wachstumsklassen sind Funktionen:**

$$n \mapsto f(n)$$

- **Diese werden so abgekürzt:**

$$\mathcal{N} := n \mapsto n$$

$$\mathcal{N}^2 := n \mapsto n^2$$

$$2^{\mathcal{N}} := n \mapsto 2^n$$

- **Eine Funktion ist Element einer**

$$\mathcal{N}^2 \in o(2^{\mathcal{N}})$$

$$(n \mapsto n^2) \in o(n \mapsto 2^n)$$

- **Meistens schreibt man einfach nur f (n) und nimmt implizit an, dass n das Argument ist**

$$f(n)$$

- **Man schreibt einfach nur**

$$n$$

$$n^2$$

$$2^n$$

- **Statt dem Element-Zeichen wird “=“ geschrieben: Wachstumsklasse**

$$n^2 = o(2^n)$$

Beispiele:

1. $\sqrt{n} = o(n)$

2. $n = o(n \log \log n)$

3. $n \log \log n = o(n \log n)$

4. $n \log n = o(n^2)$

5. $n^2 = o(n^3)$

Komplexitätstheorie

Beispiel zu Zeitklassen

Zeitkomplexitätsklassen

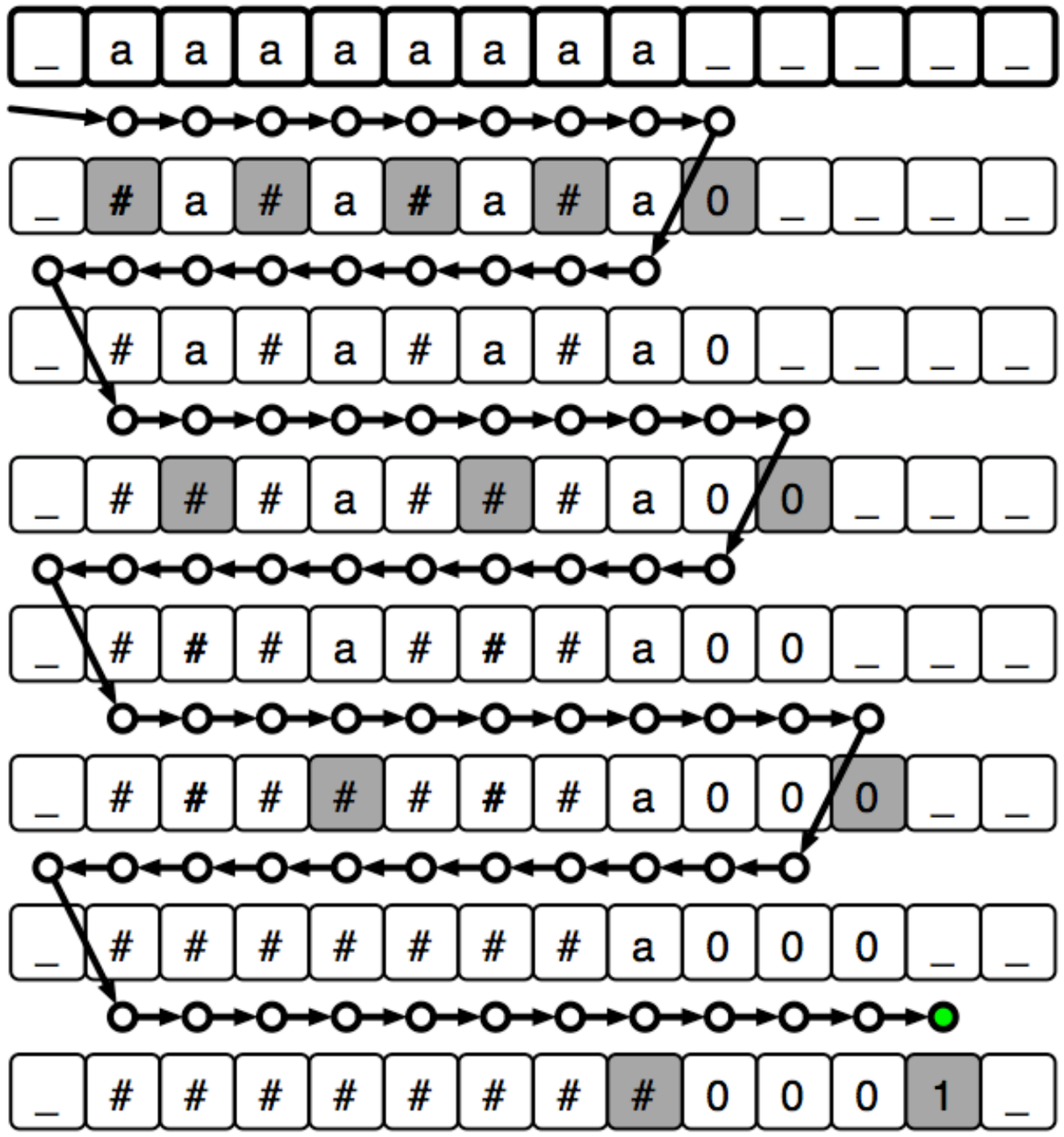
- **Definition**
  - Sei $t:N \rightarrow R^+$ eine Funktion.
  - Die Zeitkomplexitätsklasse **TIME(t(n))** ist die Menge aller Sprachen,
    - die von einer deterministischen O (t(n))-Zeit-Turing-Maschine entschieden werden.
  - Wird die Anzahl der Bänder auf k beschränkt, schreiben wir **$TIME_{k\text{-}Band}(t(n))$** oder einfach **$TIME_k(t(n))$.**
- **Beispiel:**
  - $A = \{0^k1^k \mid k \geq 0 \}$
  - Wir haben gesehen: $A \in TIME_1(n^2)$,
    - da es eine TM mit Laufzeit $O(n^2)$ gibt.
- **Frage:**
  - Gibt es eine TM, die A in Linear-Zeit löst?

Eine erste Fragestellung, eine Antwort, noch eine Frage...

- **Beispiel:**
  - $A = \{0^k1^k \mid k \geq 0\}$
  - $A \in TIME_1(n^2)$,
- **Frage:**
  - Gibt es eine TM, die A in **Linear-Zeit** löst?
- **Antwort:**
  - Ja:
  - Verwende eine TM mit 2 Bändern,
  - Kopiere alle 0er auf das zweite Band und vergleiche dann alle 1er auf dem Eingabeband mit dem zweiten Band.
- **Also: $A \in TIME_2(n)$,**
- **Frage: $A \in TIME_1(o(n^2))$?**
  - D.h. kann man A auch mit nur 1 Band in Zeit $o(n^2)$ lösen?
- **Antwort:**
  - Ja. Es gilt $A \in TIME_{1\text{-Band}}(n \log n)$.
- **Aber wie?**

Idee: Zählen

- **Gesucht: TM**
  - mit Eingabe an und
  - Ausgabe: n (in Binärdarstellung)
- **Lösung:**
  - Gehe von links nach rechts und
    - merke dabei, ob die Anzahl der as bisher gerade oder ungerade war
    - Lösche dabei jedes ungerade a, d.h. das 1.,3.,5.,...
  - Schreibe 0 falls das Ergebnis gerade war und 1 sonst rechts an das Band
  - Falls mehr als ein a übrig bleibt
    - gehe ganz nach links und fange von vorne an.
- **Laufzeit:**
  - Jeder Durchlauf maximal 2n+2log n
  - Anzahl Durchläufe: log n
  - Ergibt: (2n+2log n)log n = 2nlog n+ 2(log n)^2 = O(n log n)



Effiziente Berechnung von $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ mit 1-Band-TM

- **Algorithmus:**
  - Zähle 0er
    - Sei x das Ergebnis
  - Zähle 1er
    - Sei y das Ergebnis
  - Vergleiche x und y
- **Laufzeit:**
  - 1. Schritt: O(n log n)
  - 2. Schritt: O(n log n)
  - 3. Schritt:
    - x und y sind binärkodiert und bestehen aus höchstens log n Zeichen
    - Der Vergleich zweier Zeichenketten der Länge m kann auf einer 1-Band-DTM in Zeit O(m^2) durchgeführt werden
      - Ergibt O($(\log n)^2$)
- **Zusammengefasst:**
  - O(n log n) + O(n log n) + O($(\log n)^2$) = O(n log n)

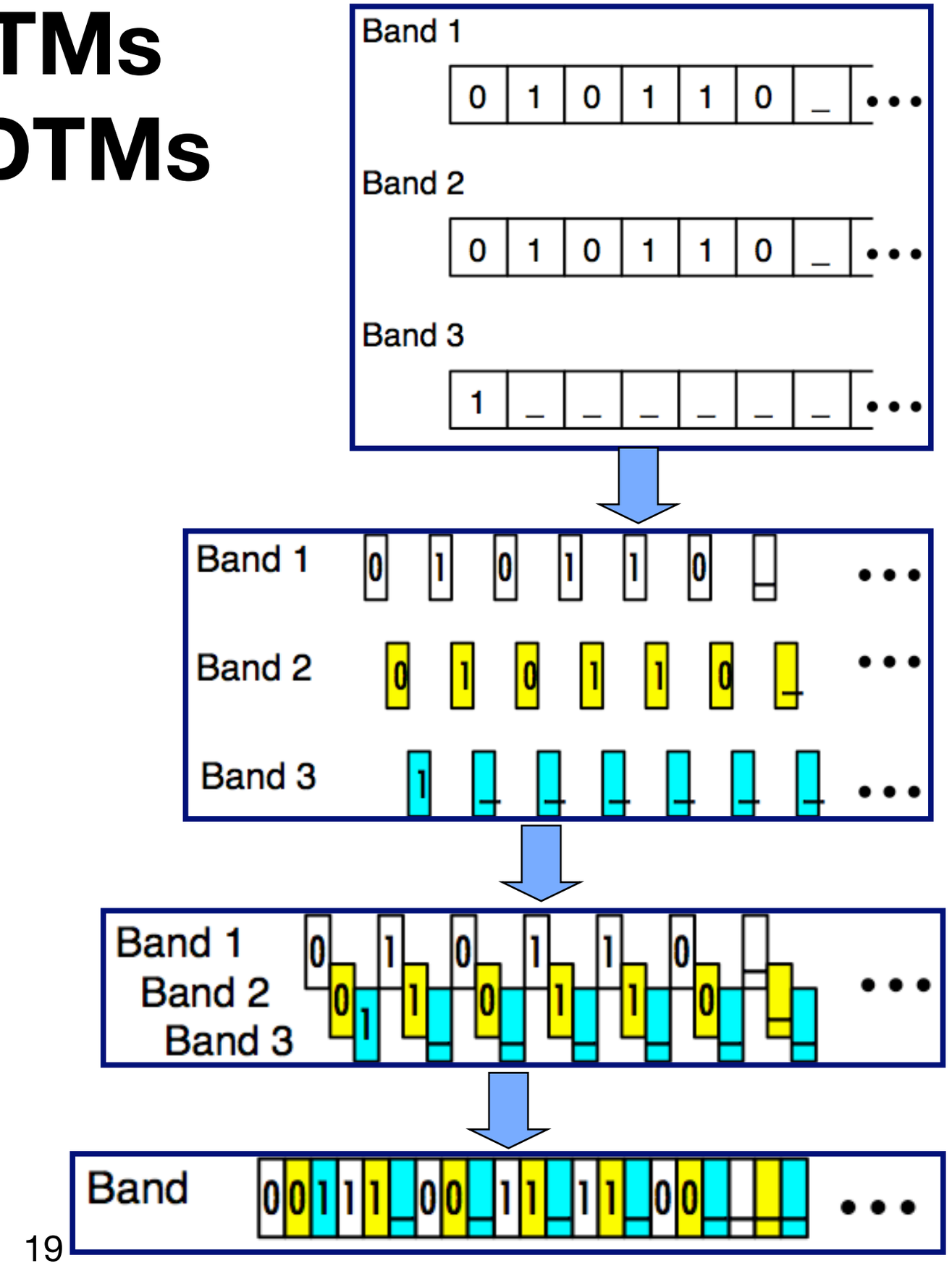
Komplexitätstheorie

Mehrband-DTM versus Ein-Band-DTM

18

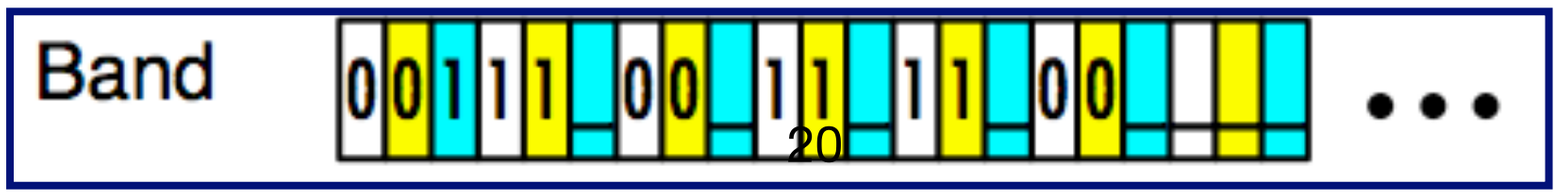
k-Band-DTMs
→ 1-Band DTMs

- **Theorem**
  - $TIME_k(t(n)) \subseteq TIME1(O(t^2(n))$, d.h.
  - Für $t(n)=\Omega(n)$ kann jede Berechnung einer k-Band-DTM von einer 1-Band DTM in Zeit $O(t^2(n))$ berechnet werden.
- **Beweis:**
  - Betrachte k-Band-DTM M mit Arbeitsalphabet Γ
  - und konstruiere 1-Band-DTM mit Alphabet Γ×{_,kopf},
    - Speichere das i.-te Symbol von Band j an der Position j + i k.
    - Verwende Markierung kopf nur wenn der Kopf der k-Band-TM an der entsprechenden Stelle steht.
  - ...



k-Band-DTMs
→ 1-Band DTMs

- **Theorem**
  - $TIME_k(t(n)) \subseteq TIME_1(O(t^2(n))$
- **Beweis (Fortsetzung)**
  - Arbeitsweise 1-Band-DTM
    - Kodiere Eingabe passend um
    - Für jeden Schritt der k-Band-DTM
      - Für jedes Band j
        - Suche Kopfposition an den Stellen {j,j+k,j+2k,...}
        - Lies Eingabe
      - Berechne den Folgezustand, neues Symbol und Bewegungsrichtung
    - Für jedes Band
      - Suche Kopfposition
      - Schreibe neues Zeichen
      - Bewege Kopfmarkierung um k Zeichen nach links oder rechts
    - Falls M hält, halte und akzeptiere/ verwerfe entsprechend



k-Band-DTMs
→ 1-Band DTMs

- **Theorem**
  - **$TIME_k(t(n)) \subseteq TIME_1(O(t^2(n))$**
- **Beweis (Laufzeit):**
  - Da die k-Band-DTM höchstens t(n) Schritte läuft, gibt es höchstens einen Folge k t(n) Zellen auf dem Band der 1-Band-DTM mit Symbolen ungleich "_"
  - Damit kann ein Kopf in Zeit k t(n) gefunden werden
  - Alle Köpfe werden in Zeit k^2 t(n) gefunden
  - Der eigentliche Simulationsschritt geschieht in konstanter Zeit.
  - Damit muss t(n) mal der Aufwand berechnet werden
    - für Köpfe finden und bewegen: $2\ k^2\ t(n) + k$
    - Simulationsschritt: 1
  - Das ergibt $(2\ k^2\ t(n) + k + 1)\ t(n)$ $= \mathbf{O(t^2(n))}$,
    - da k eine Konstante ist

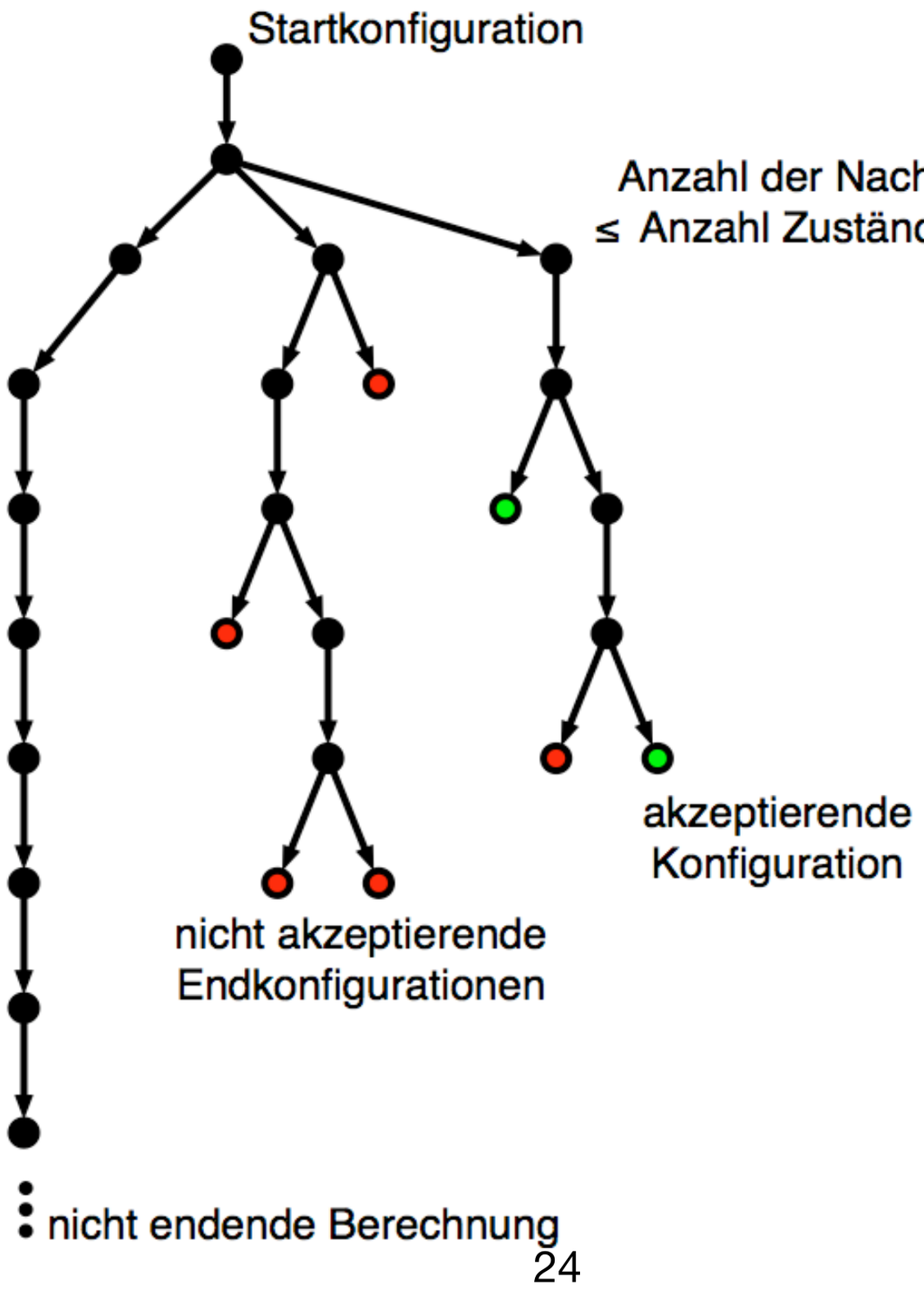
Komplexitätstheorie

DTM und NTM

Akzeptanz einer NTM

- **Eine Nichtdeterministische Turingmaschine M akzeptiert eine Eingabe w, falls es eine Folge von Konfigurationen C_1, C_2, …, C_k gibt, so dass**
  - C_1 ist die Startkonfiguration von M bei Eingabe w
  - C_i kann zu C_{i+1} überführt werden
  - C_k ist eine akzeptierende Konfiguration
- **Die von M akzeptierten Worte bilden die von M akzeptierte Sprache L(M)**
- **Eine NTM entscheidet eine Sprache, wenn jede Eingabe zu einem endlichen Berechnungsbaum der Konfigurationen führt.**
- **Die Laufzeit t(n) einer Entscheider-NTM ist die Länge des längstens Pfads im Berechnungsbaums für alle Eingaben der Länge n.**

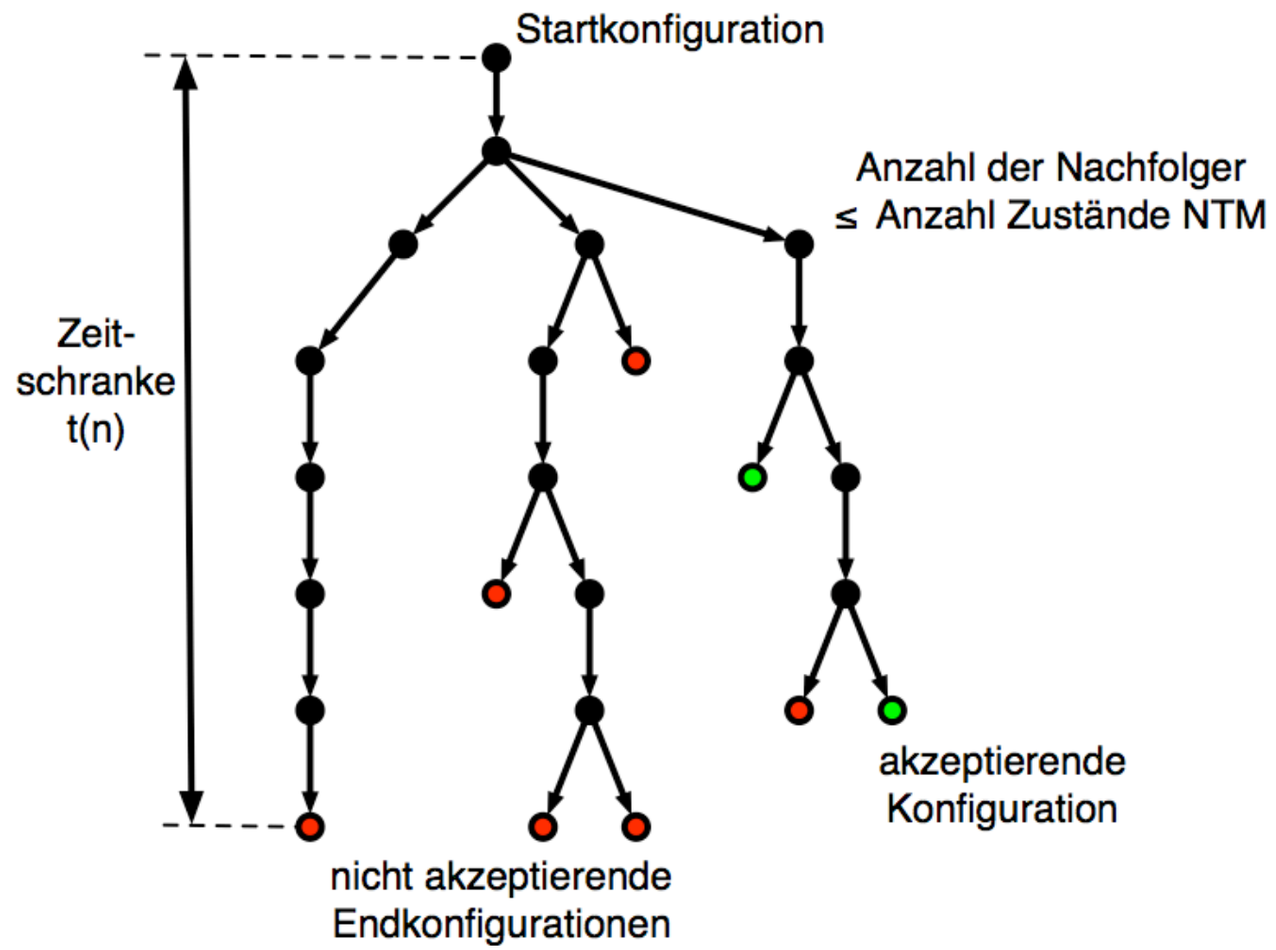
Berechnungsbaum einer NTM



24

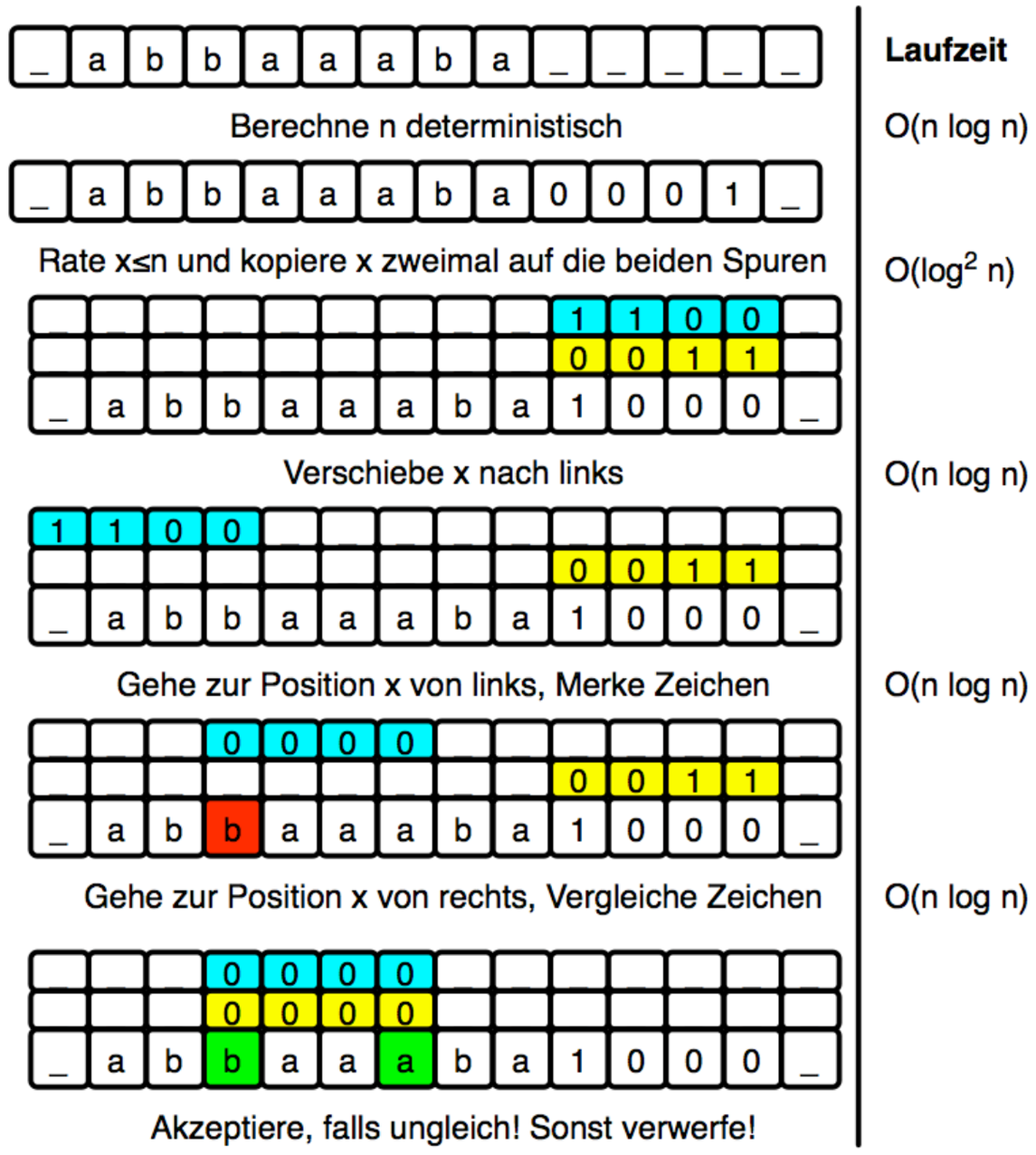
Nichtdeterministische Zeitkomplexitätsklassen

- **Definition**
  - Eine NTM ist t-Zeit-beschränkt, wenn für eine Eingabe der Länge n jede nichtdeterministische Berechnung höchstens t(n) Schritte benötigt.
- **Definition**
  - Sei $t:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}^+$ eine Funktion.
  - Die Zeitkomplexitätsklasse **NTIME(t(n))** ist die Vereinigung aller Sprachen,
    - die von einer nichtdeterministischen O (t(n))-Zeit-Turing-Maschine entschieden werden.
  - Wird die Anzahl der Bänder auf k beschränkt, schreiben wir **$NTIME_{k\text{-Band}}(t(n))$** oder einfach **$NTIME_k(t(n))$**.



Beispiel

- **Nicht-Palindrom = {w ∈ {a,b}* | w ≠ w^{rev}}**
- **Es gilt:**
  Nicht-Palindrom ∈ $NTIME_{1\text{-Band}}$(n log n),
  - da es eine O(n log n) -Zeit 1-Band-NTM die Nicht-Palindrom in Laufzeit O(n log n) löst.
- **Lösung:**
  - Rate Position x≤n
    - Dafür berechne zuerst deterministisch erstmal die Eingabegröße
  - Lies Zeichen an Position x und n-x
    - Speichere Positionszähler auf Extra-Spur
    - Verschiebe Positionszähler immer um eins
  - Merke das Zeichen jeweils im endlichen Speicher
  - Falls gilt $w_x \neq w_{n-x}$ akzeptiere, ansonsten verwerfe
- **Beachte: Es gilt**
  Nicht-Palindrom ∉ $TIME_{1\text{-Band}}$(n log n).

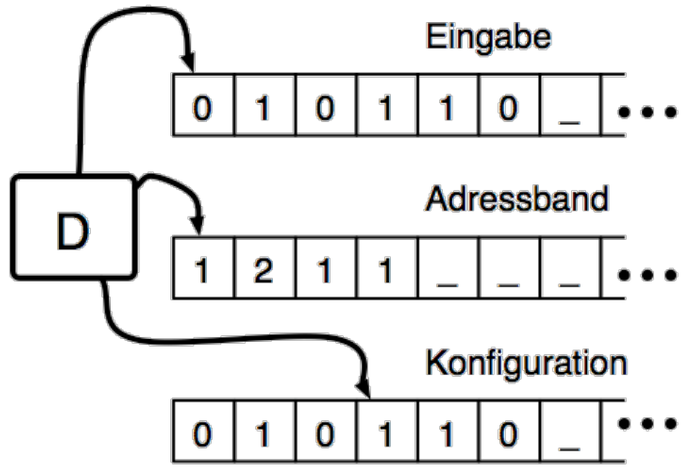


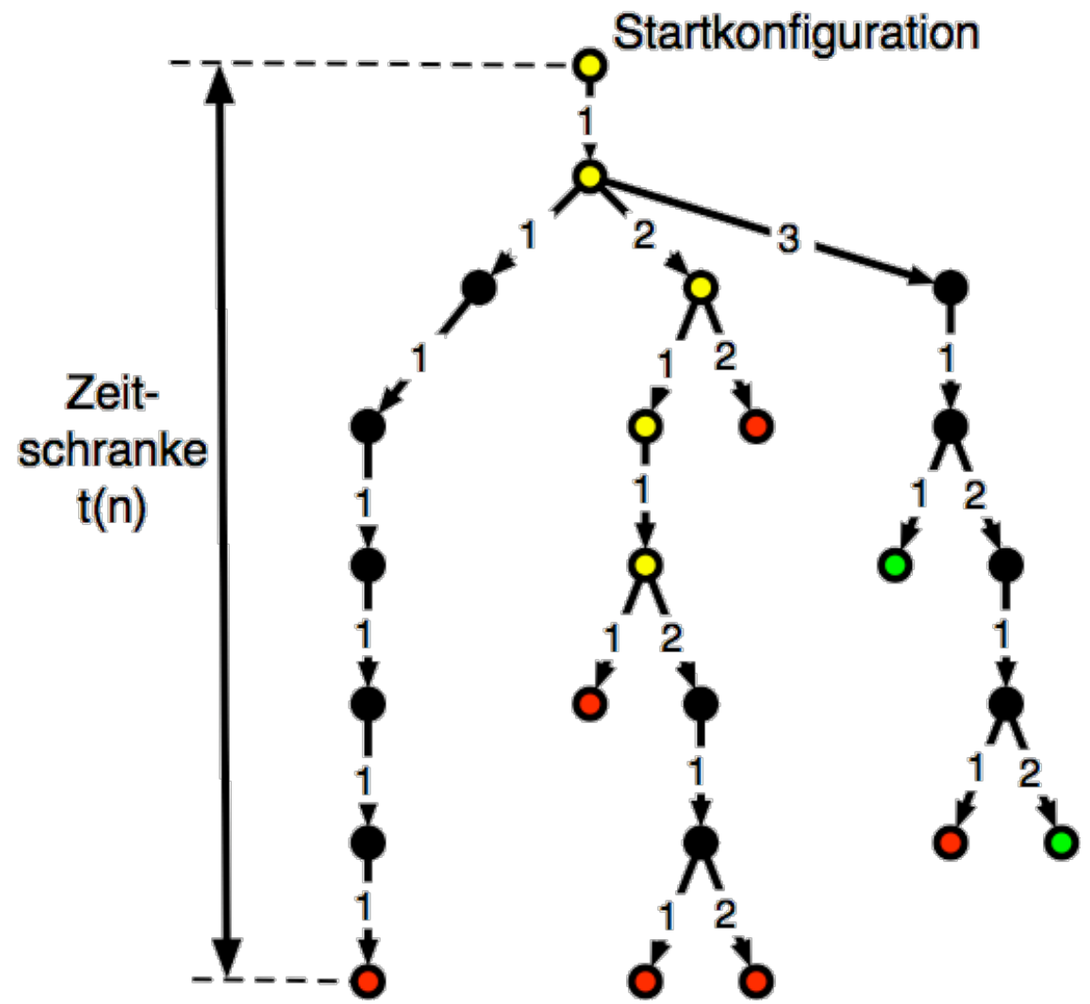
Berechnung einer 1-Band-NTM durch eine k-Band-TM

- **Theorem: Für t(n)=Ω(n)**
  - $NTIME_1(t(n)) \subseteq TIME_1(2^{O(t(n))})$, d.h.
  - Jede Berechnung einer t-Zeit 1-Band-NTM kann von einer 3-Band DTM in Zeit $2^{O(t(n))}$ durchgeführt werden.
- **Beweis:**
  - Eine Konfiguration einer TM besteht aus
    - der Bandinschrift,
    - der markierten Kopfposition und
    - dem aktuellen Zustand
  - Simuliere 1-Band-NTM mit 3-Band-DTM
    - Speichere auf Band 1 die Eingabe
    - Speichere auf Band 2 die Position der NTM im Berechnungsbaum
    - Verwende Band 3 zum Speichern der aktuellen Konfiguration
- **Lemma:**
  - Die Anzahl der Knoten im Berechnungsbaum einer t-Zeit NTM mit Zustandsmenge Q und Bandalphabet Γ ist beschränkt durch $(2|Q|\ |\Gamma|)^{t(n)+1}$.
- **Fakt:**
  - Jeder Konfigurationsübergang im Berechnungsbaum der NTM kann in einem Schritt auf dem dritten Band berechnet werden.
  - Die 3-Band-DTM wird dann mit einer 1-Band DTM berechnet.

Zeitbeschränkte Simulation einer NTM durch eine DTM

- **Beweis:**
  - Simulator DTM D:
    - Eingabeband
    - Adressband
    - Konfigurationsband
  - Zähle per Tiefensuche alle Knoten des Berechnungsbaums im Adressband auf. Sortierung:
    - Lexikographisch
      - 1111111111
      - 1111111112
      - ...
      - 3333333333
  - Für jeden Knoten des Berechnungsbaums:
    - Initialisiere Startkonfiguration
    - Führe dabei den (nun deterministischen) Konfigurationsübergang für jeden Pfad in Zeit t(n) durch
    - Falls simulierte NTM in akz. Zustand, dann halte und akzeptiere
  - Falls jeder Knoten abgearbeitet, verwerfe





Laufzeit

- **Die Anzahl der Blätter eines Baumes mit Ausgrad d und Tiefe t ist beschränkt durch**

$$1 + d + d^2 + d^3 + \ldots + d^t = \frac{d^{t+1} - 1}{d - 1} \leq d^{t+1}$$

  - Nun ist d= 2|Q| |Γ| und t=t(n)

$$(2|Q||\Gamma|)^{t(n)+1} t(n) = 2^{\log(|2|Q||\Gamma|)(t(n)+1)+\log t(n)} = 2^{O(t(n)}$$

  - **Die Berechnung bis zur Tiefe t(n) benötigt jeweils t(n) Schritte und n Schritte um die Startkonfiguration wiederherzustellen.**
  - **Simulation der 1-Band NTM mit der 3-Band-DTM benötigt höchstens Zeit**

$$\left(2^{O(t(n))}\right)^2 = 2^{2 \cdot O(t(n))} = 2^{O(t(n))}$$

DTM versus NTM
k versus k' Bänder

- **Theorem: Für k,k'$\geq$1, t(n) = Ω(n)**
  - **$TIME_k(t(n)) \subseteq TIME_{k'}(t(n)^2)$**
    - Jede Berechnung einer t-Zeit-k-Band-DTM kann von einer $O(t(n)^2)$-Zeit-k'-Band-DTM berechnet werden.
  - **$NTIME_k(t(n)) \subseteq NTIME_{k'}(t(n)^2)$**
    - Jede Berechnung einer t-Zeit-k-Band-NTM kann von einer $O(t(n)^2)$-Zeit-k'-Band-NTM berechnet werden.
  - **$NTIME_k(t(n)) \subseteq TIME_{k'}(2^{O(t(n))})$**
    - Jede Berechnung einer t-Zeit-k-Band-DTM kann von einer $2^{O(t(n))}$-Zeit-k'-Band-DTM berechnet werden.

4.1 Zeitklassen und Turing-Maschinen

Ende