Matrikelnummer:

Lösungen zur 1. Miniklausur

in

Informatik III

Aufgabe 1

3 Punkte

Betrachten Sie die folgende Sprache

$$L = \{a^n b^m \mid n \neq m, n, m \geq 0\} .$$

Ist diese Sprache regulär?

☐ Ja

☒ Nein

Beweisen Sie Ihre Aussage.

Drei alternative Lösungen:

1. Wenn L regulär ist, dann ist $L(a^*b^*) \ \setminus L = \{a^n b^n \mid n, m \geq 0\}$ ebenfalls regulär, da die regulären Sprachen gegen über Differenz abgeschlossen sind (siehe Übung). Aus der Vorlesung wissen wir das die letztere Sprache nicht regulär ist. Daher kann L nicht regulär sind.

2. L hat unendlich viele Äquivalenzklassen: $[a^n]_L$, für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Diese sind unterschiedlich, weil für $n \neq m$:

   $$a^n \not\equiv_L a^m ,$$

   weil $a^n b^n \notin L$ und $a^m b^n \in L$.

3. Pumping-Lemma. Betrachte die Wörter

   $$w_p = a^p b^{p!+p}$$

   für $p > 1$. Nun muss für $xyz = w_p$ und $|xy| \leq p$ gelten, dass $y = a^x$ für ein $x > 1$ und $x \leq p$. Natürlich ist $w_p \in L$, da $p \neq p + p!$. Wenn L regulär ist, dann ist auch $xy^i z \in L$ gelten.

   Wir wählen $i = 1 + \frac{p!}{x}$. Dann ist $xy^i z = a^{p-x+x(1+\frac{p!}{x})} b^{p!+p} = a^{p+p!} b^{p+p!} \notin L$. Daher ist L nicht regulär.

Aufgabe 2

3 Punkte

Betrachten Sie die folgende Sprache

$$L = \{a^n b^m \mid n \neq m, n, m \geq 0\} .$$

Ist diese Sprache kontextfrei?

☒ Ja

☐ Nein

Beweisen Sie Ihre Aussage.

Drei alternative Lösungen:

1. Folgende kontextfreie Grammatik $(\{S, K, R, G, A, B\}, \{a, b\}, R, S)$ beschreibt L, wobei die Regeln R wie folgt sind.

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & K \mid R \\ K & \rightarrow & aAG \\ A & \rightarrow & Aa \mid \epsilon \\ R & \rightarrow & GbB \\ B & \rightarrow & Bb \mid \epsilon \\ G & \rightarrow & aGb \mid \epsilon \end{array}$$

   Aus der Variable A können genau die Worte $L(a^*)$ abgeleitet werden. Aus B genau die Sprache $L(b^*)$. Aus G kann die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ abgeleitet werden.

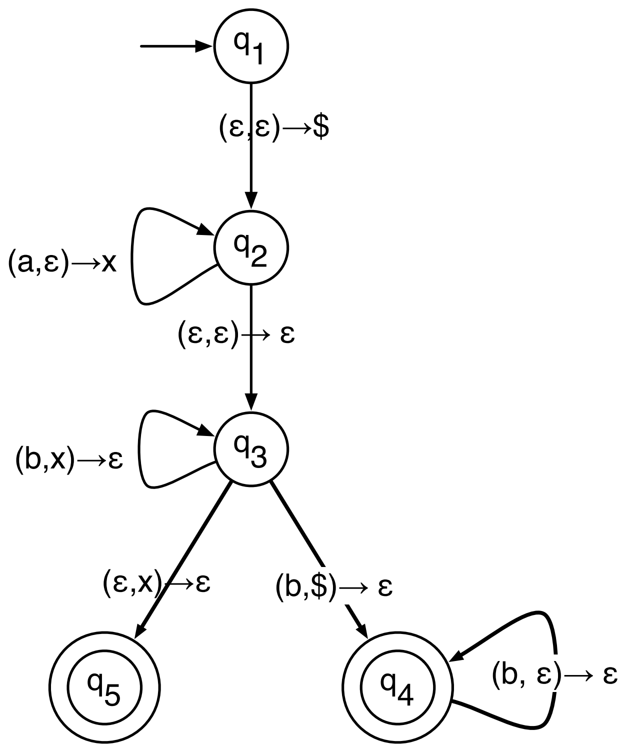
   Somit erzeugt K die Sprache $\{a^n b^m \mid n > m \geq 0\}$ und R die Sprache $\{a^n b^m \mid m > n \geq 0\}$. Aus S kann daher die Vereinigung abgeleitet werden werden. Das ist die gewünschte Sprache L.

2. Lösungsvorschlag von Daniel Fader:
   Folgende kontextfreie Grammatik $(\{A, B, C\}, \{a, b\}, R, A)$ beschreibt L, wobei die Regeln R wie folgt sind.

$$\begin{array}{rcl} A & \rightarrow & aAb \mid B \mid C \\ B & \rightarrow & a \mid aB \\ C & \rightarrow & b \mid bC \end{array}$$

   Aus A werden gleich viele a's wie b's erzeugt. Dann werden entweder nur a's oder b's in die Mitte eingefügt.

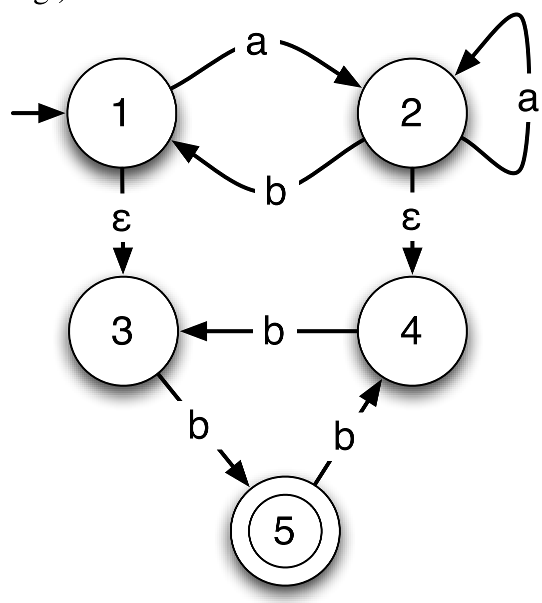
2. Der folgende Kellerautomat akzeptiert L:



Im Zustand q_3 hat man ein Teilwort der Form $a^n b^m$ mit $n \leq m$ abgearbeitet. Es befinden sich $n - m$ Symbole x im Keller. Darunter befindet sich ein \$.
Wenn jetzt ein b kommt, dann ist das Wort in L, falls nur noch b kommen. Das wird in Zustand q_4 sichergestellt.
Wenn jetzt keine Symbole mehr kommen und es sich mindestens ein x im Keller befindet, dann ist $n < m$. Der Übergang zum Zustand q_5 sorgt für die Akzeptanz dieses Worts.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Betrachten Sie den folgenden NFA A. Konstruieren Sie einen äquivalenten DFA (Grafische Darstellung genügt).



Der folgende DFA ist äquivalent zu A: