Lösungen zur zweiten Miniklausur

in

Informatik III

Aufgabe 1

1. Zeigen Sie, dass es nicht entscheidbar ist, ob eine gegebene Turing-Maschine die Menge der Fibonacci-Zahlen in Binärdarstellung entscheidet. **3 Punkte**

Die Fibonacci-Zahlen sind $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$, $x_4 = 3, \ldots$, wobei

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \; .$$

Die Menge F der Fibonacci-Zahlen in Binärdarstellung ist berechenbar.

$$F = \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists i \in \mathbb{N} : \text{bin}(x_i) = w\}$$

Für eine gegebene Eingabe w kann eine TM testen, ob $w \in F$ ist, indem man alle Fibonacci-Zahlen kleiner $2^{|w|+1}$ nach der Definition erzeugt und testet, ob die Eingabe-Zeichenkette w vorkommt.
Damit ist F entscheidbar und somit ist F auch rekursiv aufzählbar. Nach der Aufgabenstellung muss man die Sprache L_F entscheiden:

$$L_F = \{\langle M \rangle \;\mid\; L(M) \in \{F\}\} \; .$$

Nach dem Satz von Rice ist diese Sprache nicht entscheidbar, da $\{F\} \subset \mathcal{RE}$ weder leer ist noch alle rekursiv aufzählbaren Sprachen beinhaltet.

2. Zeigen Sie, dass es entscheidbar ist, ob eine gegebene Turing-Maschine das Halteproblem löst. **2 Punkte**

In dieser Aufgabenstellung ist der Begriff der „Lösung“ verwendet worden. Hierunter kann man Verschiedenes verstehen. Im ersten Fall bedeutet „lösen“, dass das Problem von einer Entscheider-TM gelöst wird. Im zweiten Fall könnte es bedeuten, dass das Problem von einer Akzeptor-TM gelöst wird. Beide Interpretationen sind richtig und werden als richtige Lösung gewertet

(a) Entscheider-TM-Lösung

Gemäß der Vorlesung gibt es keine Turing-Maschine, die das Halteproblem HALT_{TM} entscheidet. Wenn es keine TM gibt, die das Problem löst, so kann man für jede gegebene TM die Frage verneinen, ob sie das Halteproblem entscheidet. Somit ist dieses Problem entscheidbar.

(b) Akzeptor-TM-Lösung

Für diese Interpretation ist die Aussage der Aufgabenstellung falsch. Es gibt keine TM die entscheiden kann, ob das Halteproblem von einer gegebenen TM akzeptiert wird.

Das Halteproblem ist aufzählbar. Es gibt eine Turing-Maschine S, welche die Eingabe $\langle M, x\rangle$ akzeptiert, falls M auf Eingabe x akzeptiert. Hierzu simuliert man die Maschine M auf Eingabe x, bis die Simulation beendet ist. Dann akzeptiert die Simulator-TM S. Also ist $L(S) = \text{HALT}_{\text{TM}}$.

Nach dem Satz von Rice ist die Menge

$$L_\emptyset = \{\langle M\rangle \mid L(M) \in \{\text{HALT}_{\text{TM}}\}\}$$

nicht entscheidbar. Da die Menge $\{\text{HALT}_{\text{TM}}\}$ eine nichtleere, echte Teilmenge der rekursiv aufzählbaren Sprachen ist.

Aufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie, dass folgende Mengen rekursiv aufzählbar sind:

1. Der Schnitt zweier rekursiv aufzählbaren Mengen ist **4 Punkte**

   ☒ rekursiv aufzählbar.

   ☐ **nicht** rekursiv aufzählbar.

   Beweis:

   Wir betrachten für die beiden Mengen A und B die Akzeptor-TMs M_A und M_B. Hieraus konstruieren wir die folgende Akzeptor-TM:
   Auf Eingabe w wird zuerst M_A auf Eingabe w aufgerufen. Dann wird M_B auf Eingabe w aufgerufen. Falls beide Maschinen akzeptieren, akzeptiert die TM das Wort w, ansonsten wird das Wort w abgelehnt.
   Diese TM akzeptiert genau dann, wenn $w \in L(M_A) = A$ und $w \in L(M_B) = B$.
   Damit ist diese TM die Akzeptor-TM für $A \cap B$.

2. Das Komplement einer rekursiv aufzählbaren Menge ist **2 Punkte**

   ☐ rekursiv aufzählbar.

   ☐ **nicht** rekursiv aufzählbar. Beweis:

   Beide Aussagen sind in der Allgemeinheit nicht zutreffend.

   - Das Komplement einer rekursiv aufzählbaren Menge kann rekursiv aufzählbar sein.

     Hierzu betrachten wir eine rekursive Sprache (wie zum Beispiel F aus Aufgabe 1). F ist rekursiv aufzählbar und das Komplement von F ebenso.

   - Das Komplement einer rekursiv aufzählbaren Menge kann nicht rekursiv aufzählbar sein.

     Hierzu betrachten wir das Wortproblem A_{TM}. Diese Sprache ist rekursiv aufzählbar und das Komplement nicht rekursiv aufzählbar (nach Vorlesung).

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Zeigen oder widerlegen Sie:

$$\textit{HALT}_{\text{TM}} \leq_m \textit{EQ}_{\text{TM}}$$

Diese Aussage ist wahr. Es folgen zwei alternative Lösungen:

- In der Übung wurde gezeigt: $\textit{HALT}_{\text{TM}} \leq_m A_{\text{TM}}$

  In der Vorlesung wurde gezeigt $A_{\text{TM}} \leq_m \textit{EQ}_{\text{TM}}$

  Außerdem wurde in der Übung gezeigt:

  $$A \leq_m B \text{ und } B \leq_m C \implies A \leq_m C$$

  Daraus folgt $\textit{HALT}_{\text{TM}} \leq_m \textit{EQ}_{\text{TM}}$

- Wir betrachten die Reduktionsfunktion F.

  $F =$ „Auf Eingabe $\langle M, w\rangle$, wobei M eine TM ist und w ein Wort
  Konstruiere Maschinen M_1 und M_2 wie folgt:

  $M_1 =$ „Für jede Eingabe:
  Akzeptiere“

  $M_2 =$ „Für jede Eingabe:
  Führe M auf w aus
  Falls M hält, akzeptiert M_2“

  F gibt $\langle M_1, M_2\rangle$ aus“

  Die Kodierung der Turing-Maschinen kann automatisch durchgeführt werden, daher ist F berechenbar.

  Falls Maschine M auf Eingabe w hält, dann sind Maschine M_1 und M_2 äquivalent: Beide akzeptieren Σ^*.

  Falls Maschine M auf Eingabe w nicht hält, dann sind Maschine M_1 und Maschine M_2 nicht äquivalent: M_2 akzeptiert dann $\emptyset$. Daraus folgt die Korrektheit:

  $$\langle M, w\rangle \in \textit{HALT}_{\text{TM}} \iff F(< M, w >) \in \textit{EQ}_{\text{TM}}$$