Lösungen zur Nachklausur der zweiten Miniklausur

in

Informatik III

Aufgabe 1

1. Beweisen oder widerlegen Sie: Die Vereinigung zweier entscheidbarer Sprachen ist entscheidbar. **3 Punkte**

   Für die beiden entscheidbaren Sprachen L_1 und L_2 seien M_1 und M_2 die Entscheider-Turing-Maschinen. Wir konstruieren jetzt die Entscheider Turing-Maschine M_3:
   Zuerst wird die Eingabe x auf ein gesondertes Arbeitsband gespeichert. Dann wird M_1 auf Eingabe x simuliert und das Ergebnis auf dem gesonderten Arbeitsband gespeichert. Dann werden die anderen Bänder gelöscht und die Eingabe x rekonstruiert, indem es vom gesonderten Band auf das Eingabeband zurück geschrieben wird. Dann wird M_2 auf Eingabe x simuliert.
   M_3 akzeptiert, wenn M_1 und M_2 akzeptiert haben, ansonsten verwirft M_3 auf Eingabe x.
   Die Turing-Maschine M_3 entscheidet nun $L_1 \cap L_2$. Damit ist der Schnitt zweier entscheidbarer Sprachen entscheidbar.

2. Beweisen oder widerlegen Sie: Der Schnitt einer rekursiv aufzählbaren Sprache mit einer rekursiv ko-aufzählbaren Sprache ist entscheidbar. **3 Punkte**

   Sei A_{TM} die erste, rekursiv aufzählbare Sprache und Σ^* die zweite, rekursiv ko-aufzählbare Sprache. Diese Eigenschaften gelten gemäß Vorlesung.
   Der Schnitt dieser Sprachen ist A_{TM}. Gemäß Vorlesung ist A_{TM} nicht entscheidbar. Damit ist die Aussage nicht wahr.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die folgende Sprache $L = \{\langle M \rangle \mid M$ ist eine Turingmaschine, die bei allen Eingaben, die aus gleichen Buchstaben bestehen, nicht hält$\}$

1. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Reduktionen implizieren, dass L nicht rekursiv aufzählbar ist. **1 Punkt**
   Hierbei beschreibt $\overline{\text{HALT}_{\text{TM}}}$ das Komplement des Halteproblems der Turing-Maschinen, $\leq_m$ die Abbildungsreduktion und $\leq_T$ die Turing-Reduktion.

   - [X] $\overline{\text{HALT}_{\text{TM}}} \leq_m L$
   - [ ] $L \leq_m \overline{\text{HALT}_{\text{TM}}}$
   - [ ] $\overline{\text{HALT}_{\text{TM}}} \leq_T L$
   - [ ] $L \leq_T \overline{\text{HALT}_{\text{TM}}}$

2. Beweisen Sie nun, dass L nicht rekursiv aufzählbar ist, indem Sie die Reduktionsfunktion angeben und die Korrektheit beweisen. **3 Punkte**

Die Reduktionsfunktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ist wie folgt:

$$f(\langle M, w \rangle) = \langle M' \rangle ,$$

wobei $M' =$ „Auf Eingabe x, simuliere M auf Eingabe w“.

Zu zeigen: $x \in \overline{\text{HALT}_{\text{TM}}} \iff f(x) \in L$:

Sei $\langle M, w \rangle \in \overline{\text{HALT}_{\text{TM}}}$. Dann hält M auf Eingabe w nicht. Somit hält M' nie und insbesondere nie auf den Eingaben aus gleichen Buchstaben. Damit ist $\langle M' \rangle \in L$.

Sei $\langle M, w \rangle \notin \overline{\text{HALT}_{\text{TM}}}$. Dann hält M auf Eingabe w. Somit hält M' immer und insbesondere auf allen Eingaben aus gleichen Buchstaben. Damit ist $\langle M' \rangle \notin L$.
Daraus folgt die Korrektheit der angekreuzten Reduktion.

Aufgabe 3

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an. **5 Punkte**

1. Eine DTM, die eine Sprache L akzeptiert, kann für jede Eingabe den Inhalt jeder Zelle höchstens endlich oft ändern.

   ☐ Richtig

   ☒ Falsch

   Begründung

   Falls die Sprache L nicht Σ^* ist, kann eine Akzeptor-TM auf den Eingaben $x \notin L$ beliebig lange rechnen und dabei auch die Zelleninhalte beliebig oft ändern. Akzeptor-TMs müssen nur halten, wenn sie Eingaben akzeptieren (anders als Entscheider-TMs).

2. Für jede entscheidbare Sprache gibt es unendlich viele Turing-Maschinen, die diese entscheiden.

   ☒ Richtig

   ☐ Falsch

   Begründung

   Man kann eine gegebene Turing-Maschine variieren, ohne ihre Funktionalität zu verändern. Hierzu kann man beispielsweise k nicht erreichbare Zustände in die Zustandsmenge aufnehmen. Die entstehenden (unendlich vielen) Turing-Maschinen führen die identischen Berechnungen durch (haben die gleichen Konfigurationen), sind aber formal unterschiedlich.

3. Das Komplement einer entscheidbaren Sprache muss nicht entscheidbar sein.

   ☐ Richtig

   ☒ Falsch

   Begründung

   Gemäß Vorlesung ist das Komplement einer entscheidbaren Sprache entscheidbar. Hierzu muss man nur die akzeptierenden und ablehnenden Endzustände der Entscheider-TM einer Sprache vertauschen, um die Entscheider-TM der Komplementärsprache zu erhalten.

4. Das Komplement einer kontextfreien Sprache ist immer rekursiv aufzählbar.

   - [x] Richtig
   - [ ] Falsch

   Begründung

   Zwar ist das Komplement einer kontextfreien Sprache nicht unbedingt kontextfrei, aber eine kontextfreie Sprache ist nach Vorlesung eine entscheidbare Sprache. Wie eben gesehen sind diese unter Komplement abgeschlossen und entscheidbare Sprachen sind immer rekursiv aufzählbar, da eine Entscheider-TM auch eine Akzeptor-TM ist.

5. Die Menge der Turingmaschinen, die das Postsche Korrespondenzproblem entscheiden, ist entscheidbar.

   - [x] Richtig
   - [ ] Falsch

   Begründung

   Gemäß der Vorlesung gibt es keine Turing-Maschine, die das Postsche Korrespondenzproblem entscheidet. Daher kann die Frage, ob eine gegebene TM das Postsche Korrespondenzproblem entscheidet, immer verneint werden. Eine TM, die also immer verwirft, entscheidet die (leere) Menge der Turingmaschinen, die das Postsche Korrespondenzproblem entscheiden, korrekt.