Lösungen zur Nachklausur der dritten Miniklausur

Aufgabe 1 **5 Punkte**

Das Problem HALF-CLIQUE ist wie folgt definiert.

HALF-CLIQUE $= \{\langle G\rangle \mid G = (V, E)$ ist ein ungerichteter Graph, der eine Clique mit mindestens $\frac{|V|}{2}$ Knoten enthält. $\}$

Zeigen Sie, dass HALF-CLIQUE NP-vollständig ist.

HALF-CLIQUE ist in NP:
Es gibt einen Verifizierer für HALF-CLIQUE. Hierzu werden $|V|/2$ Knoten geraten. Der Verifizierer überprüft nun, ob zwischen allen geratenen Knoten eine Kante existiert. Die Laufzeit dieses Algorithmus ist höchstens quadratisch in der Eingabelänge und damit polynomiell zeitbeschränkt.

HALF-CLIQUE ist NP-schwierig:
Laut Vorlesung ist CLIQUE NP-vollständig. Wenn nun CLIQUE $\leq_{m,p}$ HALF-CLIQUE gilt, dann folgt, dass HALF-CLIQUE NP-schwierig ist.

Beweis der Reduktion CLIQUE $\leq_{m,p}$ HALF-CLIQUE
Die Reduktionsfunktion unterscheidet drei Fälle. Sei $V = V(G)$.

1. Fall: $k = |V|/2$. Dann ist $f(G, k) = G$.
2. Fall: $k > |V|/2$. Dann bildet $f(G, k)$ auf einen Graphen G' ab, der G beinhaltet und noch $2k - |V|$ zusätzliche Knoten hat, die an keiner Kante liegen.
3. Fall: $k < |V|/2$. Dann bildet $f(G, k)$ auf einen Graphen G' ab, der G beinhaltet und noch einen zusätzlichen vollständigen Graph mit $|V| - \lceil k/2\rceil$ Knoten hat. Jeder dieser Knoten hat Kante zu allen Knoten aus G. Falls k ungerade ist, wird noch ein einzelner Knoten ohne jede Kante eingefügt.

Laufzeit: Es ist offensichtlich, dass diese Operation in polynomieller Zeit berechnet werden kann, da nur Knoten oder Teilgraphen polynomieller Länge eingefügt werden.

Beweis der Korrektheit:

1. Fall $(G, k) \in$ CLIQUE. Dann besitzt G eine Clique der Größe k. Dann besitzt nach Konstruktion G' eine Clique der Größe $|V(G')|/2$, da im 2. Fall $|V(G')| = 2k - |V| + |V|$ ist und im 3. Fall $|V(G')| = |V| + |V| - k/2 = 2|V| - k$ und eine Clique der Größe $k + |V| - k/2 = |V| - k/2$ existiert. Falls im 3. Fall k ungerade ist, dann ist $|V(G')| = |V| + |V| - k/2 = 2|V| - k - 1$ und eine Clique der Größe $k + |V| - \lceil k/2 \rceil = |V| - k - 1/2$ existiert.

2. Fall $G' \in$ HALF-CLIQUE.

   Im ersten und zweiten Fall ist es offensichtlich, dass G nun eine k-Clique besitzt. Für den dritten Fall beobachtet man, dass wenn G' eine $|V(G')|/2$-Clique besitzt, dass dann eine solche Clique existiert, in der alle zugefügten Knoten beteiligt sind. Hat man eine Clique, die diese unvollständig benutzt, so kann man diese mit diesen zugefügten Knoten zu einer größeren Clique ergänzen. In jedem Fall besitzt der ursprüngliche Graph dann mindestens eine k-Clique.

Aufgabe 2

1. Aus SAT $\notin$ P folgt CLIQUE $\notin$ P. **2 Punkte**

   [X] Die Aussage ist korrekt.

   [ ] Die Aussage ist falsch.

   [ ] Bis jetzt ist die Richtigkeit unklar. Aus der Aussage folgte aber, dass [ ] = [ ], was dramatische Konsequenzen hätte.

   Beweis:

   Aus CLIQUE $\in$ P folgt wegen der NP-Schwierigkeit von CLIQUE, dass P $=$ NP. Weil laut Vorlesung SAT $\in$ NP folgt, dass SAT $\in$ P. Also gilt

   $$\text{CLIQUE} \in \text{P} \implies \text{SAT} \in \text{P}$$

   Das ist äquivalent zur Aufgabenstellung.

2. Das Komplement jeder NP-Sprache ist in PSPACE. **3 Punkte**

- [x] Die Aussage ist korrekt.
- [ ] Die Aussage ist falsch.
- [ ] Bis jetzt ist die Richtigkeit unklar. Aus der Aussage folgte aber, dass ______ = ______, was dramatische Konsequenzen hätte.

Beweis:

Laut Vorlesung ist NP $\subseteq$ PSPACE. Also ist co-NP $\subseteq$ co-PSPACE. PSPACE ist unter Komplement abgeschlossen. Also ist co-NP $\subseteq$ PSPACE.

Aufgabe 3 **5 Punkte**

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

1. 2-SAT $\leq_{m,p}$ 3-SAT **2 Punkte**

   2-SAT ist ein Spezialfall von 3-SAT. Daher kann man als Reduktionsfunktion die identische Funktion wählen. Die Korrektheit und die polynomielle Laufzeit folgen unmittelbar.

2. 4-SAT $\leq_{m,p}$ 3-SAT **3 Punkte**

   3-SAT ist NP-schwierig. Daher kann man jedes NP-Problem auf 3-SAT reduzieren. 4-SAT ist ein Spezialfall von SAT und daher in NP. Somit kann man 4-SAT auf 3-SAT reduzieren.