Christian Schindelhauer Freiburg, den 10. Dezember 2007

Lösungen zur Übung
Informatik-III
Wintersemester 2007/2008
Blatt 7

Aufgabe 22 (1 Punkt für schriftliche Lösung)
Betrachten Sie für ein $x \in \mathbb{R}$ die folgende Sprache

$$L_x = \{w \in \{0, 1, \dots, 9\}^* \mid w \text{ kommt als geschlossener Block in der Dezimaldarstellung von } x \text{ vor}\}$$

1. Zeigen Sie, dass L_π rekursiv aufzählbar ist.

   Hinweis: $\pi = \lim_{n\to\infty} 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)}\right)$

   Lösung:

   Um zu zeigen, dass L_π rekursiv aufzählbar ist, kann man eine Aufzähler-TM oder eine Akzeptor-TM angeben. Hier werden wir eine Lösung mit Akzeptor-TM M angeben.

   Die Turing-Maschine M erhält nun eine Zeichenkette $w \in \{0, \dots, 9\}^*$ als Eingabe. Wir gehen zunächst davon aus, dass wir eine Turingmaschine Π haben, welche auf Eingabe a^n die n-te Dezimalstelle von π ausgibt (Also $\Pi(\epsilon) = 3$, $\Pi(a) = 1$, $\Pi(aa) = 4$, etc.)

   Das folgende Programm beschreibt das Verhalten der gesuchten Turing-Maschine.

```
if w = ϵ then TM akzeptiert
ℓ ← 1
f ← 0
while f = 0 do
    for i ← 0 to ℓ do
        for j ← i to ℓ do
            if w = Π(a^i), Π(a^{i+1}), ... Π(a^j) then f ← 1
        end for
    end for
    ℓ ← ℓ + 1
end while
TM akzeptiert
```

   Man kann leicht einsehen, dass $\Pi(a^n)$ durch Berechnen der ersten 10^{2n+1} Summenglieder der oben dargestellten Reihe berechnet werden kann, indem man das Ergebnis mit 10^n multipliziert, rundet und den Rest modulo 10 berechnet.

2. Zeigen Sie, dass es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass L_x nicht entscheidbar ist.

Lösung 1:

Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Sprache A_{TM} nicht entscheidbar, aber rekursiv aufzählbar ist. Wir gehen davon aus, dass die Sprache A_{TM} über dem Alphabet $\{0, 1\}$ dargestellt wird. Es sei

$$A_{\text{TM}} = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$$

Wir definieren nun x wie folgt:

$$x = 2,\ w_1\ 2\ w_2\ 2\ w_3\ 2\ w_4\ 2\ w_5\ 2\ \ldots$$

Natürlich ist x eine reelle Zahl. Angenommen, dass L_x entscheidbar ist. Dann sei M eine TM, die L_x entscheidet. Auf die Eingabe $2w2$ für $w \in \{0, 1\}^*$ würde M genau dann akzeptieren, falls $w \in A_{\text{TM}}$.

Damit kann man aus M eine Turing-Maschine M' konstruieren, die A_{TM} entscheiden würde. Das ist ein Widerspruch. Damit ist die Annahme falsch und L_x ist nicht entscheidbar.

Lösung 2:

Wir werden nun beweisen, dass die Menge $\mathcal{L} = \{L_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ nicht abzählbar ist. Da es nur abzählbar viele entscheidbare Sprachen gibt, muss es ein x geben, so dass L_x nicht entscheidbar ist.

Um zu zeigen, dass $\mathcal{L}$ überabzählbar ist, geben wir eine eineindeutige Abbildung von $f : [0, 1] \to \mathcal{L}$ an. Für die Abbildung stellen wir zuerst $x \in [0, 1]$ als Binärzahl wie folgt dar:

$$x = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$$

für $b_i \in \{0, 1\}$. Daraus konstruieren wir $y = f(x)$ wie folgt:

$$\begin{array}{rllll} y = 8, & 1 & 9 & b_1 & 8 \\ & 10 & 9 & b_2 & 8 \\ & 11 & 9 & b_3 & 8 \\ & 100 & 9 & b_4 & 8 \\ & 101 & 9 & b_5 & 8 \\ & 110 & 9 & b_6 & 8 \quad \ldots \end{array}$$

Diese Abbildung ist eineindeutig, weil für $x_1 \neq x_2$ diese Zahlen sich mindestens in einer Binärstelle b_j unterscheiden. Dann ist $8\text{bin}(j)9b_j8$ in L_{x_1} und nicht in L_{x_2} oder umgekehrt (wenn $\text{bin}(j)$ die Binärdarstellung von j beschreibt). Somit sind L_{x_1} und L_{x_2} verschieden und damit hat $\mathcal{L}$ mindestens die selbe Kardinalität wie die reellen Zahlen.